

**PRONÓSTICOS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL  
DE LAS TASAS DE INTERÉS EN MÉXICO  
CON BASE EN UN MODELO AFÍN**

**FORECASTING THE TERM STRUCTURE  
OF INTEREST RATES IN MEXICO  
USING AN AFFINE MODEL**

**Rocío Elizondo**

*Banco de México*

*Resumen:* Se muestra que un modelo afín permite igualar o mejorar los pronósticos de la estructura temporal de las tasas de interés en México. El modelo de pronóstico se especifica como una relación lineal entre las tasas de interés y tres factores observables, para vencimientos de 1-60 meses. Los pronósticos del modelo afín son comparados con estos de una tasa *forward*, un AR(1), un VAR(1) y una caminata aleatoria. El modelo afín tiene un desempeño comparable con los otros modelos para horizontes de 12- y 18- meses, con excepción de la caminata aleatoria, que presenta menores pronósticos para los vencimientos de 24- y 36- meses. No obstante, el modelo afín mejora su desempeño de pronóstico para los horizontes de 24- meses, principalmente para vencimientos de 60-meses

*Abstract:* This paper shows that an affine model allows to equalize or improve the forecasts of the term structure of interest rates in Mexico. The forecasting model is a linear relationship between interest rates and three observable factors, using maturities 1-60 months. Affine model predictions are compared with those of forward rates, AR(1), VAR(1), and random walks. Affine model has a performance comparable to other models for horizons of 12- and 18-months, except for the random walk, which presents smaller forecast for maturities of 24- and 36-months. However, improving its forecasting performance for the 24-month horizon, and especially for 60-month maturities.

*Clasificación JEL/JEL Classification: G12, E43, C12, C53*

*Palabras clave/keywords: modelo afín, pronósticos, curva de rendimientos, componentes principales, condición de no arbitraje, affine model, forecasts, yield curve, principal components, non-arbitrage condition*

*Fecha de recepción: 09 VIII 2016*

*Fecha de aceptación: 10 II 2017*

*Estudios Económicos, vol. 32, núm. 2, julio-diciembre 2017, páginas 213-253*

## 1. Introducción

De acuerdo con la literatura, el estudio de la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés tanto para los economistas, inversionistas como para los hacedores de política es importante por diversas razones (Ver Cox, Ingersoll y Ross, 1985; Duffie y Kan, 1996; Ang y Piazzesi, 2003). Una de las principales es que la estructura temporal de las tasas de interés contiene información sobre la trayectoria futura de la economía (pronóstico). Asimismo, la estructura temporal de las tasas de interés puede proporcionar información sobre las expectativas de los participantes en los mercados financieros. Dichas expectativas son de considerable importancia para los pronosticadores y los hacedores de política, debido a que lo que piensan los participantes en el mercado acerca de lo que puede suceder en el futuro afecta sus decisiones actuales, las cuales, a su vez, ayudan a determinar lo que realmente sucede en el futuro. Una segunda razón para analizar el comportamiento de la estructura temporal de las tasas de interés es el estudio de los mecanismos de transmisión de la política monetaria, de modo que, para un estado dado de la economía, un modelo de la estructura temporal puede ayudar a explicar cómo las tasas de corto plazo se ven reflejadas en los niveles de las tasas de interés de largo plazo. Esto es importante porque las tasas de largo plazo desempeñan un papel fundamental en una serie de decisiones económicas, tales como las de las empresas sobre la inversión y las de los hogares con respecto a la adquisición de bienes durables (o de ahorro). Otra razón para estudiar la estructura temporal de las tasas de interés es la política de deuda de los gobiernos, debido a que cuando se emite nueva deuda éstos últimos necesitan decidir acerca de los vencimientos de los nuevos bonos. Finalmente, la estructura temporal es fundamental en la estimación de derivados y en la cobertura de alguna eventualidad. Por ejemplo, en el caso de evaluar estrategias óptimas los bancos necesitan saber cómo los precios de los derivados dependen del estado actual de la economía.

Debido a que el análisis de la estructura temporal de las tasas de interés es importante para diversos sectores de la economía, como se mencionó, este artículo tiene como finalidad pronosticar, basado en un modelo afín con factores exógenos, la estructura temporal de las tasas de interés para diferentes horizontes de tiempo.

Cabe destacar que hasta el momento no conocemos trabajos formales para México que pronostiquen la estructura temporal de las tasas de interés, por lo que nos resulta interesante desarrollar la presente investigación, cuyo objetivo principal es explorar, para el caso

de la economía mexicana, la capacidad predictiva del modelo aquí presentado. Además, en la literatura la mayoría de los modelos se han concentrado en pronosticar tanto horizontes de corto plazo (menores o iguales a un año) como la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés con vencimientos de corto plazo. Asimismo, los que pronostican la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés de mayores plazos, casi siempre, recurren a modelos autorregresivos o a VARs que no incorporan la condición de no arbitraje y, por lo tanto, sólo pronostican la dinámica de los rendimientos utilizados en la estimación. La bondad del modelo propuesto es que permite estimar y pronosticar la estructura temporal de las tasas de interés consistentes con la condición de no arbitraje para cualquier vencimiento.

Existe una extensa literatura teórica y empírica con respecto a la estimación de la estructura temporal de las tasas de interés. Desde antes de los años 80 ya se contaba con modelos que estimaban los precios de bonos en una forma analítica y cerrada (Vasicek, 1977; Cox, Ingersoll y Ross, 1985). Unos años más tarde aparecieron los modelos paramétricos parsimoniosos que, a través de la estimación de factores, caracterizaron la estructura temporal de las tasas de interés mediante el nivel, la pendiente y la curvatura de dicha estructura (Nelson-Siegel, 1987; Svensson, 1994). Cabe destacar que este tipo de modelos admite oportunidades de arbitraje, es decir, las primas por riesgo de las tasas de interés de largo plazo no pueden ser separadas de las expectativas de las tasas de interés de corto plazo futuras. Posteriormente surgen los modelos afines, los cuales incorporan la condición de no arbitraje (Duffie y Kan, 1996; Dai y Singleton, 2000; Ang y Piazzesi, 2003; para el caso de México: Cortés y Ramos-Francia, 2008).<sup>1</sup> Los modelos afines difieren unos de otros en dos formas: una es con respecto a la función afín utilizada, que puede ser lineal, exponencial, etc., y la otra es con respecto a cómo se consideran las variables de estado dentro del modelo afín, las cuales pueden ser no observables o latentes (Ang y Piazzesi, 2003; Ang, Bekaert y Wei, 2007) o bien pueden ser observables. Estas últimas se pueden estimar por diferentes métodos, entre los más comunes se tienen: *a*) Nelson-Siegel (Diebold y Li, 2006; Favero, Niu y Sala, 2007; Gimeno y Marques, 2009; De Pooter, Ravazzolo y van Dijk, 2010; Yu y Zivot, 2011) y *b*) componentes principales (Sethi, 2008; para el caso de México: Cortés, Ramos-Francia

---

<sup>1</sup> El término afín se refiere a que las tasas de interés de los bonos son afines al vector de estados. En otras palabras, las tasas de interés tienen una relación lineal con las variables de estado.

y Torres, 2008). Un gran número de estudios en años recientes se han enfocado en pronosticar dicha estructura para diferentes horizontes de tiempo (Mönch, 2005; Diebol y Li, 2006; Chistensen, Diebold y Rudebusch, 2007; Favero, Niu y Sala, 2007; De Pooter, Ravazzolo y van Dijk, 2010; Yu y Zivot, 2011; entre otros).

En particular, la finalidad de este artículo es mostrar que al utilizar un modelo afín con factores exógenos, estimados mediante la técnica de componentes principales donde se incorpora la condición de no arbitraje, iguala o mejora el desempeño de predicción de la estructura temporal de las tasas de interés en México. Cabe señalar que la estructura del modelo es similar a la del modelo de Gimeno y Marques (2009).<sup>2</sup>

Además, para mostrar el desempeño relativo del modelo propuesto, se presentan los pronósticos fuera de muestra, estimados mediante el modelo afín con factores exógenos, y cuatro modelos de referencia de las tasas de interés para vencimientos selectos, basados en una tasa *forward*, un AR(1), un VAR(1) y un modelo de caminata aleatoria, respectivamente. En particular el desempeño de cada modelo es medido mediante la raíz cuadrada del error cuadrático medio (bien conocido en inglés como *root mean squart error*, RMSE).

Adicionalmente, para verificar estadísticamente si los pronósticos del modelo afín con los provenientes de los modelos de referencia son iguales se consideraron las pruebas de hipótesis de Harvey, Leybourne y Newbold (1997) y de Clark y McCracken (2001, 2010).<sup>3</sup>

Como resultados principales se tienen dos, el primero, en horizontes de pronóstico corto (12 meses) y mediano (18 meses), los pronósticos de las tasas de interés fuera de muestra obtenidos mediante el modelo afín, en promedio, son comparables con los pronósticos obtenidos con los otros modelos considerados, a excepción del mode-

---

<sup>2</sup> La diferencia radica en que en el modelo de Gimeno y Marques se utilizan como factores observables las componentes obtenidas mediante el modelo de Nelson y Siegel (1987). Mientras que en este documento se utilizan como factores observables las primeras tres componentes principales derivadas de la estructura temporal de las tasas de interés. Además, Gimeno y Marques consideran la tasa de inflación como un componente extra debido a que su modelo se utiliza para extraer la expectativa de tasa de inflación del mercado y no para pronosticar. La idea es aprovechar la estructura de este modelo y ver el comportamiento de los pronósticos de la curva de rendimientos en el modelo más simple al considerar sólo los tres factores derivados de la estructura temporal de las tasas de interés.

<sup>3</sup> Esta última se aplica en el caso en donde los pronósticos de los modelos comparados estén anidados.

lo de caminata aleatoria, que presenta menores errores de pronósticos para los vencimientos de 24 y 36 meses. Conviene destacar que aunque en algunos modelos, principalmente en la caminata aleatoria, los errores de los pronósticos son más pequeños que aquellos de los modelos afines, los estadísticos HLN y CM en la mayoría de los casos aceptan la igualdad de pronósticos, lo que nos lleva a concluir que los pronósticos de los modelos afines son comparables con aquellos de los modelos de referencia en dichos horizontes. Sin embargo, en un horizonte de pronóstico más largo (24 meses) y para vencimientos largos (5 años), los modelos afines, en promedio, proporcionan mejores pronósticos que los otros cuatro modelos considerados para cualquier horizonte de pronóstico.<sup>4</sup>

En el segundo resultado hay que destacar que los porcentajes de los RMSEs obtenidos en los pronósticos fuera de muestra para un horizonte de pronóstico de 12 meses tienen magnitudes similares a los obtenidos por otros estudios en la literatura, por ejemplo, Mönch (2005).

El estudio se divide de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan los datos y su descripción estadística, en la 3 se describe paso a paso el modelo afín con factores exógenos. En la sección 4 se presenta el ajuste del modelo afín dentro de muestra, en la 5 se proporcionan los pronósticos fuera de muestra del modelo afín con factores exógenos y se comparan con los pronósticos obtenidos de los cuatro modelos de referencia considerados. Asimismo, se presentan las pruebas estadísticas de Harvey, Leybourne y Newbold (1997) y de Clark y McCracken (2001, 2010), para comparar si los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes son iguales o distintos. Finalmente, en la última sección se concluye.

## 2. Datos

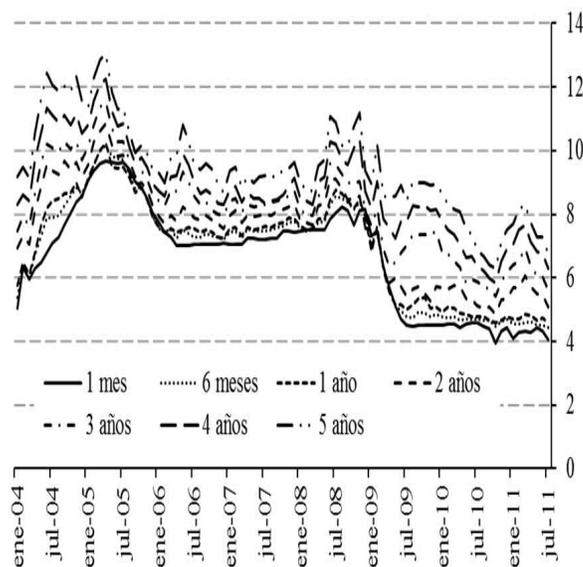
Para las estimaciones de los modelos se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos que van de 1 hasta 60 meses, con periodicidad mensual para la muestra, que abarca de enero de

---

<sup>4</sup> La intuición de por qué los modelos afines predicen mejor los vencimientos de largo plazo en horizontes largos se debe a que éstos incluyen aversión al riesgo en la estimación de la estructura temporal de las tasas de interés. Lo que hace a los modelos afines más robustos en ambientes de inestabilidad de parámetros, no linealidades y no normalidad. Para más detalles se puede consultar Yu y Zivot (2011).

2004 a julio de 2011.<sup>5</sup> Los datos fueron obtenidos de Valmer. En la gráfica 1 se presentan las series de tiempo de las tasas de interés de bonos cupón cero para vencimientos selectos que se utilizarán en el análisis.

**Gráfica 1**  
*Estructura temporal de las tasas de interés para vencimientos selectos*



En la gráfica 1 se puede observar que, en general, a partir de febrero de 2004 las tasas de interés comenzaron a subir de manera considerable hasta alcanzar un máximo de febrero a agosto de 2005. Después, empezaron a disminuir hasta abril de 2006 en donde se mantuvieron en un rango aproximado de 7.5 a 9.5% hasta abril de 2008. Posteriormente, tuvieron un repunte que se extendió a diciembre de

<sup>5</sup> Los datos mensuales corresponden a la última observación de cada mes de las tasas de interés de los bonos cupón cero. Cabe destacar que, derivado de la remonetización que se dio con la adopción del esquema de objetivos de inflación, los niveles de las tasas de interés se redujeron considerablemente a partir de 2001 y hasta julio de 2003. Para evitar que los resultados del análisis se vean alterados por dicha dinámica se decidió empezar este a partir de enero de 2004.

2008 y, finalmente, comenzaron a disminuir con un nivel más bajo en julio de 2009, el cual se ha mantenido estable en un rango aproximado de 4 a 8%, para los diferentes vencimientos de las tasas de interés de bonos cupón cero que van de un mes hasta 5 años.

En el cuadro 1 se presentan las estadísticas más importantes de la estructura temporal de las tasas de interés para algunos vencimientos. En ellas se observa que no es posible rechazar, al menos a 5% de confianza, la hipótesis de normalidad en los datos de las tasas de interés (ver estadístico Jarque-Bera y su probabilidad). Otra característica importante de las tasas de interés es que a pesar de que gráficamente se ve más movimiento en las tasas de interés de largo plazo (de 2 años a 5 años), sus desviaciones estándar son menores que las de las tasas de corto plazo (menores o iguales a un año). Finalmente, se observa que los coeficientes de autocorrelación son significativos, al menos a un nivel de 5% de confianza. Además, el coeficiente de  $\rho(1)$  para los diferentes vencimientos de las tasas de interés es cercano a uno.

**Cuadro 1**  
*Estadísticas de la estructura temporal de las tasas  
de interés para vencimientos selectos*

Estadísticas	Vencimientos en meses					
	1	6	12	24	36	60
Media	6.677	6.919	7.031	7.534	8.171	9.476
Mediana	7.070	7.429	7.528	7.894	8.306	9.283
Máximo	9.653	10.170	10.226	10.855	11.535	13.062
Mínimo	3.959	4.450	4.580	4.865	5.427	6.294
Dev. est.	1.677	1.664	1.602	1.570	1.450	1.522
Asimetría	-0.139	-0.156	-0.197	-0.085	0.027	0.261
Curtosis	1.919	1.873	1.827	1.971	2.355	2.745
Jarque-Bera	4.726	5.186	5.802	4.123	1.587	1.279
Probabilidad	0.094	0.075	0.055	0.127	0.452	0.527
$\rho(1)$	0.965*	0.965*	0.960*	0.959*	0.942*	0.913*
$\rho(12)$	0.327*	0.358*	0.376*	0.414*	0.394*	0.288*
$\rho(18)$	-0.112*	-0.133*	0.140*	0.177*	0.144*	0.044*
$\rho(24)$	-0.019*	0.000*	0.004*	0.028*	0.037*	-0.042*

Notas: \*Coeficientes de auto-correlación estadísticamente significativos a un nivel de 5% de confianza. Periodo de estimación enero de 2004 - julio de 2011.

Adicionalmente, en el cuadro 2 se presentan pruebas de hipótesis para mostrar que las tasas de interés a diferentes plazos, en su conjunto, no presentan cambios estructurales. En particular, se consideran de cero a cinco cambios estructurales y se muestran dos estadísticos de prueba el de Schwarz y el LWZ (criterio de información de Schwarz modificado). Los resultados de las pruebas proporcionan evidencia de que las tasas de interés no tienen cambios estructurales.

### 3. El modelo afín con factores exógenos

Los motivos de utilizar un modelo afín con factores exógenos, en lugar de algún otro modelo ya existente en la amplia literatura de la estructura temporal de las tasas de interés son los siguientes: Primero, el utilizar un modelo de Nelson-Siegel produce un buen ajuste, ya que éste al ser un modelo parsimonioso captura adecuadamente el nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés; la desventaja es que no considera condiciones de no arbitraje.<sup>6</sup> Segundo, dentro de los modelos que incorporan la condición de no arbitraje están los modelos afines con factores latentes (Ang y Piazzesi, 2003; Ang, Bekaert, Wei, 2007), cuya desventaja es que, al momento de su estimación, dependen fuertemente de las condiciones iniciales propuestas, de la selección arbitraria de los vencimientos de las tasas de interés que tienen que ser observadas sin error, así como de las restricciones impuestas en los parámetros para conseguir convergencia. Con esta idea, para evitar las desventajas de los dos modelos antes mencionados, se propone el modelo afín con factores exógenos. Por un lado, con los factores exógenos (estimados mediante componentes principales) este modelo captura la dinámica de la estructura temporal de las tasas de interés en cuanto a su nivel, su pendiente y su curvatura (para más detalles ver Cortés, Ramos-Francia y Torres, 2008); por otro lado, a través de la estructura del modelo afín, se incorpora la condición de no arbitraje y la aversión al riesgo. Una ventaja del modelo propuesto es que se imponen menos restricciones, lo que proporciona un modelo parsimonioso y robusto, con el cual se pueden realizar pronósticos de la estructura temporal de las tasas de interés.

---

<sup>6</sup> Este es un modelo paramétrico parsimonioso de corte transversal que, a través de la estimación de tres factores, caracteriza la estructura temporal de las tasas de interés. Los factores corresponden al nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés. Para más detalles ver Nelson y Siegel (1987).

**Cuadro 2**  
*Pruebas de múltiples cambios estructurales*

	<i>y6meses</i>	<i>y12meses</i>	<i>y18meses</i>	<i>y24meses</i>	<i>y30meses</i>	<i>y36meses</i>	<i>y42meses</i>	<i>y48meses</i>	<i>y60meses</i>
Núm. cambios C. Schwarz	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Núm. cambios C. LWZ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Suma de residuales	7.30	5.99	8.51	9.87	11.69	11.96	13.68	16.23	23.96
Log-L	-14.64	-5.76	-21.57	-28.22	-35.85	-36.88	-42.92	-50.61	-68.16
Estadístico Schwarz	-2.01	-2.21	-1.86	-1.71	-1.541	-1.52	-1.38	-1.21	-0.82
Estadístico LWZ	-1.61	-1.81	-1.46	-1.31	-1.142	-1.12	-0.99	-0.81	-0.42

A continuación se describe paso a paso la estimación del modelo afín con factores exógenos.

### 3.1. Estimación del modelo afín

Debido a que el modelo afín es ya bien conocido en la literatura, aquí solamente se presentan sus características más importantes, así como su representación y la interpretación de algunos parámetros (ver Duffie y Kan, 1996; Dai y Singleton, 2000; Ang y Piazzesi, 2003).

Se considera el sistema de ecuaciones de espacio-estado en el cual se involucran una ecuación de transición, ecuación (1), y una ecuación de medida, ecuación (2). En particular, la primera corresponde a la relación que guardan entre sí las variables de estado y, en este caso, siguen la dinámica de un VAR(1). En tanto que la segunda relaciona a las tasas de interés a diferentes vencimientos con las variables de estado.

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \Sigma e_t, \quad e_t \sim N(0, I) \quad (1)$$

$$\hat{y}_t^{(k)} = -\frac{1}{k}(\hat{A}_k + \hat{B}'_k X_t) \quad (2)$$

El parámetro  $\mu$  es un vector de constantes (corresponde al intercepto del vector de estados  $X_t$ ),  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas del término de error  $e_t$  y  $\phi$  es una matriz de coeficientes autorregresivos. Se consideran tres variables de estado observables,  $X_t = [X_t^1, X_t^2, X_t^3]$  que son estimadas mediante el método de componentes principales (CP). De tal forma que los parámetros  $\mu$ ,  $\phi$  y  $\Sigma$  pueden estimarse a través del método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO). Los coeficientes  $\hat{A}_k$  y  $\hat{B}'_k$  se estiman de forma recursiva y sus expresiones implícitas se derivan de la condición de no arbitraje que se muestra más adelante.

Los cambios en las tasas de interés a través del tiempo serán el resultado de cambios en los factores  $X_t$ , mientras que las diferencias en la estructura temporal de las tasas de interés serán determinadas por los coeficientes  $\hat{A}_k$  y  $\hat{B}'_k$ .

De la ecuación (2) se desprende la tasa de corto plazo,  $y_t^{(1)}$ , con  $A_1 = -\delta_0$  y  $B_1 = -\delta_1$  tal que:

$$y_t^{(1)} = \delta_0 + \delta_1' X_t + \varepsilon_t^{(1)} \quad (3)$$

Se utiliza la tasa de interés con vencimiento de un mes como la tasa de corto plazo observable y se estiman los parámetros  $\delta_0$  y  $\delta_1$  mediante el método de MCO.

Como ya se mencionó, una de las características importantes de los modelos afines es la condición de no arbitraje, la cual restringe a los coeficientes  $\hat{A}_k$  y  $\hat{B}'_k$  de la ecuación (2) de la siguiente forma:<sup>7</sup>

$$e^{A_{k+1} + B'_{k+1} X_t} = E_t \left[ e^{A_1 + B'_1 X_t} e^{A_k + B'_k X_{t+1}} \right] \quad (4)$$

Los coeficientes  $\hat{A}_k$  y  $\hat{B}'_k$  se obtienen recursivamente de la ecuación (4) al resolver la esperanza  $E_t$  y queda como:

$$\hat{A}_{k+1} = \hat{A}_k + \hat{B}'_k (\mu - \Sigma \lambda_0) + \frac{1}{2} \hat{B}'_k \Sigma \Sigma' \hat{B}_k - \delta_0 \quad (5)$$

$$\hat{B}'_{k+1} = \hat{B}'_k (\phi - \Sigma \lambda_1) - \delta'_1 \quad (6)$$

Con  $\hat{A}_1 = -\delta_0$  y  $\hat{B}_1 = -\delta_1$ . Además,  $\lambda_0$  es un vector y  $\lambda_1$  es una matriz de coeficientes. Los coeficientes recursivos  $\hat{A}_{k+1}$  y  $\hat{B}'_{k+1}$  determinan las tasas de interés con vencimiento en  $k + 1$ . Dichos coeficientes son el resultado de la agregación de: los determinantes de las tasas de interés de corto plazo ( $\delta_0$  y  $\delta'_1$ ), las diferencias entre la tasa de corto plazo actual y su valor pronosticado (dados por  $\hat{A}_k + \hat{B}'_k \mu$  y  $\hat{B}'_k \phi$ ), una compensación por riesgo ( $\hat{B}'_k \Sigma \lambda_0$  y  $\hat{B}'_k \lambda_1$ ) y un

---

<sup>7</sup> La condición de no arbitraje garantiza la existencia de una medida neutral al riesgo que permite, en este caso, que las tasas de interés sean expresadas en términos de resultados futuros de la estructura temporal. Las medidas neutrales al riesgo son usualmente convertidas en probabilidades que utilizan la derivada de Radon-Nikodym, denotadas por  $\xi_t$ , que sirven para encontrar explícitamente la esperanza  $E_t$ . Para más detalles se puede consultar Ang y Piazzesi (2003); Gimeno y Marques (2009).

término cuadrático que viene de la desigualdad de Jensen aplicada para determinar dichos coeficientes ( $\frac{1}{2}\hat{B}_k'\Sigma\Sigma'\hat{B}_k$ ).

Se puede observar que los parámetros  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$  son el resultado de considerar aversión al riesgo en el modelo (para mayores detalles ver Ang y Piazzesi, 2003; Gimeno y Marques, 2009). Esto se debe a que se obtendrá alguna compensación por la incertidumbre en las tasas de interés de largo plazo, en las cuales el choque aleatorio  $e_t$  en (1) es acumulativo. Cabe destacar que a mayores choques aleatorios en el VAR, representado por la ecuación (1), se generará mayor incertidumbre en los valores futuros de las tasas de interés. Por lo tanto, para compensar a los agentes que invierten en tasas de largo plazo se considera una prima por riesgo relativa a  $\Sigma$  que será integrada en las tasas de interés. Así, los coeficientes que trasladan la matriz  $\Sigma$  dentro de la prima por riesgo son llamados precios de riesgo ( $\lambda_t$ ) y, de acuerdo con la literatura, estos coeficientes son también afines a las variables de estado  $X_t$ . Dichos precios de riesgo están representados por la expresión:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t \quad (7)$$

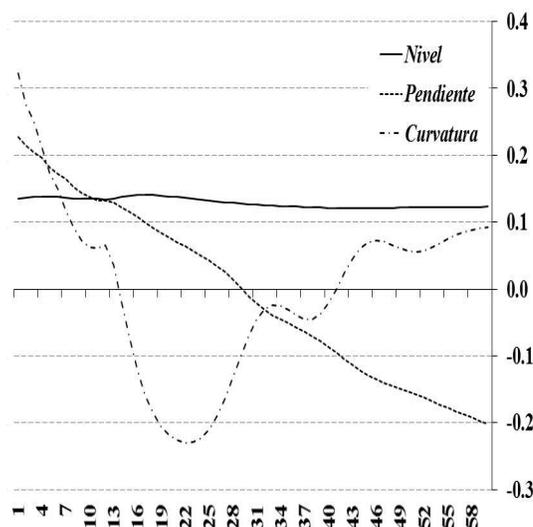
Cabe destacar que si  $\lambda_1 = 0$ , entonces la prima por riesgo será constante. Mientras que si  $\lambda_1 \neq 0$ , la prima por riesgo variará en el tiempo. El cambio en la prima por riesgo,  $\lambda_t$ , a través del tiempo estará determinado por el cambio en los factores.

Finalmente, los parámetros  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$  del modelo afín se estiman mediante el método de máxima verosimilitud de los errores al utilizar la ecuación (2) de donde se deriva que  $\varepsilon_t^{(k)} = y_t^{(k)} - \hat{y}_t^{(k)}$  con  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I)$ . Las variables  $y_t^{(k)}$  y  $\hat{y}_t^{(k)}$  son la tasa de interés observada y estimada al tiempo  $t$  con vencimiento en  $k$ , respectivamente. Dadas las características principales del modelo, a continuación se muestran los resultados obtenidos.

### 3.2. Estimación de los factores exógenos

Como ya se mencionó, se estiman las tres variables de estado o factores  $X_t = [X_t^1, X_t^2, X_t^3]$ , mediante el método de CP, dichos factores se relacionan con el nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés (ver Tipping y Bishop, 1999; Jolliffe, 2002). Los pesos de los factores a través de los vencimientos de las tasas de interés que se obtienen del método de CP se pueden ver en la gráfica 2.

**Gráfica 2**  
*Pesos de los factores con respecto al vencimiento de las tasas de interés*



Notas: El eje *y* corresponde al peso del componente principal referente al nivel ( $X_t^1$ ), la pendiente ( $X_t^2$ ) y la curvatura ( $X_t^3$ ) en cada vencimiento, respectivamente. En el eje *x* se tienen los vencimientos de las tasas de interés, que van de 1 hasta 60 meses.

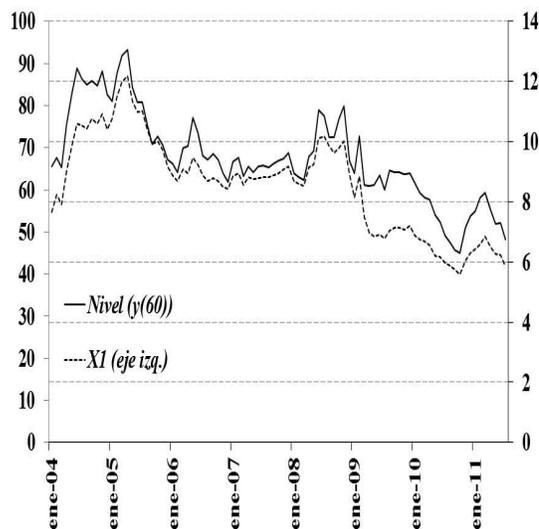
El análisis del significado de cada componente principal puede verse en Cortés, Ramos-Francia y Torres (2008), en donde se encuentra que los pesos del primer componente principal, al ser casi horizontales, corresponden al nivel de la curva de las tasas de interés. Así, los desplazamientos de ésta son en forma paralela. Los pesos del segundo componente principal corresponden a la pendiente y, al ser éste negativo, significa que los cambios en dicho componente rotan la curva de las tasas de interés. Finalmente, el peso del tercer componente corresponde a la curvatura debido a que los extremos de corto y largo plazo aumentan con respecto al resto de los plazos, en tanto que las tasas de interés de mediano plazo disminuyen.<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Cabe señalar que estos hechos fueron encontrados por los autores mencionados en un análisis empírico de la estructura temporal de las tasas de interés para México en el periodo del 26 de julio de 2001 al 20 de marzo de 2008. En dicho estudio se encuentra que los primeros dos componentes principales son capaces

La gráfica 3 muestra la dinámica de las variables de estado  $X_t$ , en su representación de nivel, pendiente y la curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés. Además, se grafican sus valores empíricos, por ejemplo, el vencimiento máximo de la tasa de interés es equivalente al nivel de la estructura temporal ( $nivel = y_t^{(60)}$ ), la tasa de interés con vencimiento de mayor plazo menos la tasa de interés con vencimiento de 3 meses corresponde a la pendiente de dicha estructura temporal ( $pendiente = y_t^{(60)} - y_t^{(3)}$ ). Finalmente, dos veces la tasa de interés con vencimiento de 2 años menos la tasa de interés con vencimiento de 3 meses menos la tasa de interés con vencimiento máximo equivale a la curvatura ( $curvatura = 2y_t^{(24)} - y_t^{(60)} - y_t^{(3)}$ ).

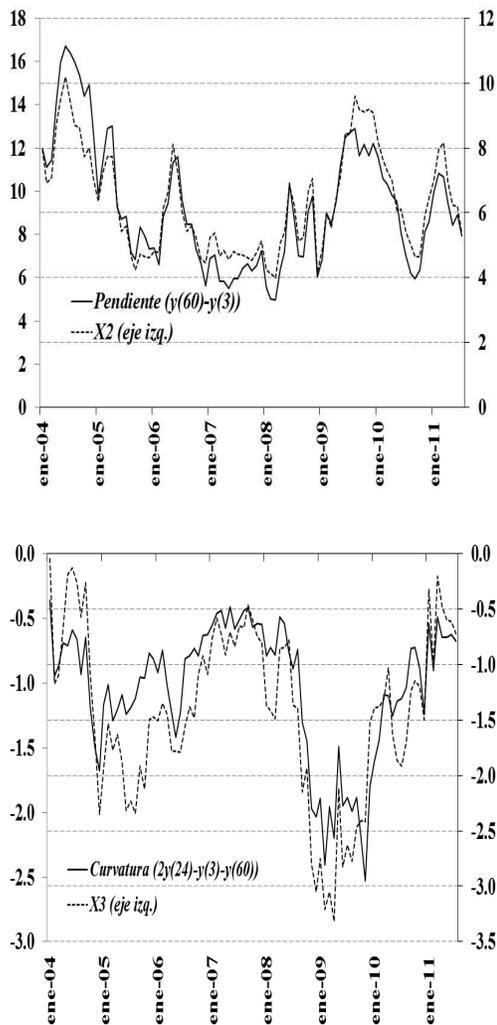
### Gráfica 3

*Nivel, pendiente y curvatura de la estructura temporal de las tasas de interés con vencimiento máximo de 60 meses*



de explicar 95% de la variabilidad de la curva de rendimientos. El análisis aquí presentado abarca de enero de 2004 a julio de 2011 y se conserva la estructura (o forma) y el significado de los componentes principales. Además, la proporción de varianza explicada por los primeros tres componentes es de 99.7% (el primero explica 95, el segundo 4 y el tercero 0.7 por ciento). Adicionalmente, para más detalle acerca del significado de dichos componentes también se puede consultar Diebold y Li (2006).

**Gráfica 3**  
(continuación)



**4. Ajuste del modelo afín versus los datos observados**

Estimadas las variables de estado  $X_t$ , se ajusta a estas un VAR(1) como se vio en la ecuación (1). El modelo VAR toma en cuenta la predictibilidad observada en las tasas de interés, pero al mismo tiempo

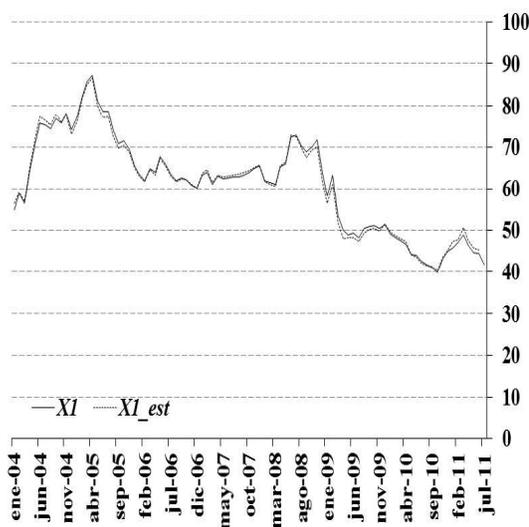
tiene un grado de incertidumbre en el valor futuro de las tasas de interés representado por el vector  $e_t$ , el cual es considerado ruido blanco.

En la gráfica 4 se muestra el ajuste del vector de estados  $X_t$  con los componentes obtenidos del VAR(1), así como los parámetros estimados  $\mu$ ,  $\phi$  y  $\Sigma$ . Cabe destacar que la matriz  $\Sigma$  considerada corresponde a la matriz triangular superior de Cholesky.<sup>9</sup>

Adicionalmente, para verificar que los supuestos de la dinámica de las variables de estado se satisfacen, en el cuadro 3 se muestra la prueba de hipótesis de que los errores de las variables de estado en el VAR(1) se distribuyen individualmente como normales. La prueba también sugiere que, en conjunto, los errores se distribuyen como una normal multivariada con media cero y varianza  $\Sigma\Sigma'$ .

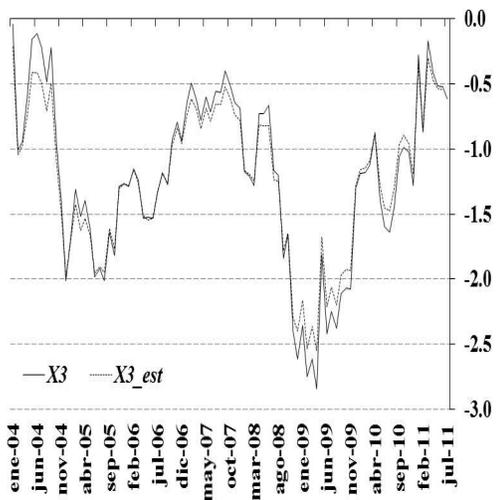
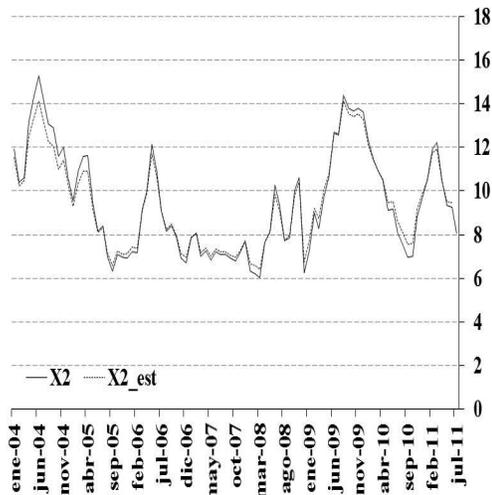
#### Gráfica 4

*Ajuste de cada componente del VAR(1) al vector de estados  $X_t$  y los parámetros estimados*



<sup>9</sup> En los modelos afines con factores latentes (ver Ang y Piazzesi, 2003), generalmente se restringe a que la matriz sea triangular (superior o inferior) para evitar problemas de identificación de parámetros al estimar el modelo. En este caso, como dicha matriz es estimada por MCO exógenamente al modelo afín, puede obtenerse sin ningún problema de identificación. Se consideró la matriz triangular superior porque es con la que se obtuvo un mejor ajuste a la estructura temporal de las tasas de interés.

**Gráfica 4**  
(continuación)



$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} .9809 & -.0840 & -1.2779 \\ (.026) & (.125) & (.451) \\ .0173 & .8779 & -.1452 \\ (.010) & (.050) & (.180) \\ .0053 & -.0085 & .8503 \\ (.003) & (.015) & (.053) \end{pmatrix} \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} 1.7988 \\ (2.104) \\ -2.0034 \\ (.838) \\ -.2136 \\ (.249) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{vmatrix} 2.7515 & -.8439 & -.0651 \\ .0000 & .6987 & -.0141 \\ .0000 & -.0000 & .3183 \end{vmatrix}$$

Notas: Los errores estándar de los parámetros estimados se encuentran entre paréntesis. La  $\Sigma$  corresponde a la matriz superior de Cholesky construida a partir de los errores de la estimación ( $\Sigma = e_t e_t'$ ).

Por otro lado, se considera que la tasa de interés de corto plazo es una función afín a las variables de estado  $X_t$ , ver (3). Debido a que se está trabajando con datos mensuales se puede usar la tasa de interés con vencimiento de un mes,  $y_t^{(1)}$ , como la tasa de interés de corto plazo observable. En la gráfica 5 se presenta el ajuste de la tasa de interés de un mes en relación con su función afín y sus respectivos parámetros de estimación con sus errores estándar entre paréntesis.

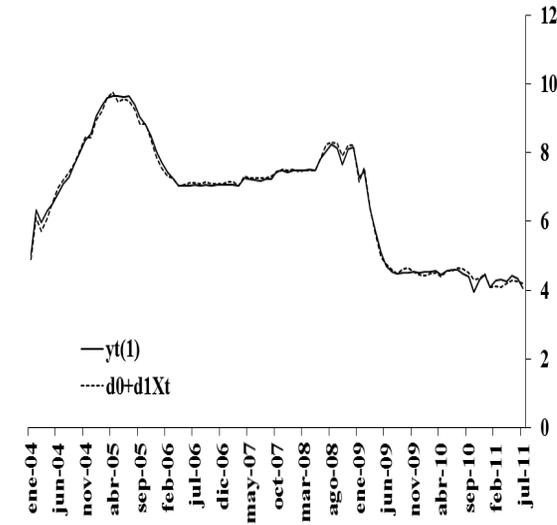
**Cuadro 3**  
*Prueba de normalidad de los residuales*

<i>Comp.</i>	<i>Simetría</i>	$X^2$	<i>Grados lib.</i>	<i>Prob.</i>
1	0.234	0.814	1	0.367
2	-0.211	0.661	1	0.416
3	-0.124	0.229	1	0.632
<b>Conjunto</b>		<b>1.704</b>	<b>3</b>	<b>0.636</b>
<i>Comp.</i>	<i>Curtosis</i>	$X^2$	<i>Grados lib.</i>	<i>Prob.</i>
1	3.519	1.000	1	0.317
2	4.273	6.009	1	0.014
3	3.354	0.464	1	0.496
<b>Conjunto</b>		<b>7.472</b>	<b>3</b>	<b>0.0583</b>
<i>Comp.</i>	<i>Jarque-Bera</i>		<i>Grados lib.</i>	<i>Prob.</i>
1	1.814		2	0.4038
2	6.670		2	0.0356
3	0.693		2	0.7072
<b>Conjunto</b>	<b>9.177</b>		<b>6.000</b>	<b>0.1639</b>

Notas: La prueba utiliza la ortogonalization de Cholesky (Lutkepohl).

La hipótesis nula es que los residuales se distribuyen como una normal multivariada. Si  $e_t \sim N(0, I)$  implica que  $\Sigma e_t \sim N(0, \Sigma \Sigma')$ .

**Gráfica 5**  
*Tasas de interés de corto plazo tanto observada como estimada y sus respectivos parámetros*



$$\hat{\delta}_0 = \begin{pmatrix} .2156 \\ (.083) \end{pmatrix} \quad \hat{\delta}_1 = \begin{pmatrix} .1345 & .2269 & .3222 \\ (.001) & (.005) & (.018) \end{pmatrix}$$

Al considerar la condición de no arbitraje y la aversión al riesgo es posible transformar la ecuación (4) en un sistema recursivo de ecuaciones, cuya solución está dada por las ecuaciones (5) y (6). Estas dos últimas determinarán los coeficientes ( $\hat{A}_{k+1}$  y  $\hat{B}'_{k+1}$ ) de las tasas de interés con vencimiento en  $k + 1$ . Definidos los coeficientes, se estiman las tasas de interés a diferentes vencimientos  $k$ ,  $\hat{y}_t^{(k)}$ , mediante la ecuación (2).

Como se mencionó, la estimación de los parámetros que faltan ( $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  y  $\sigma$ ) se realiza mediante la maximización de la función de verosimilitud de los errores,  $\varepsilon_t^{(k)} = y_t^{(k)} - \hat{y}_t^{(k)}$  con  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I)$ . Las variables  $y_t^{(k)}$  y  $\hat{y}_t^{(k)}$  son la tasa de interés observada y estimada al tiempo  $t$  con vencimiento en  $k$ , respectivamente.<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Dado que la muestra de las series de tiempo de las tasas de interés de bonos cupón cero abarca de enero de 2004 a julio de 2011, podría pensarse que se tiene un

Para poder identificar estos parámetros se considera el caso más simple en el cual  $\lambda_1$  es una matriz diagonal y el error del modelo,  $\varepsilon_t$ , tiene una matriz de covarianza diagonal constante,  $\sigma^2 I$ .<sup>11</sup> Así, los parámetros estimados junto con sus errores estándar en paréntesis son:

$$\hat{\lambda}_1 = \begin{vmatrix} .0003 & 0 & 0 \\ (3.26e - 06) & & \\ 0 & -.1135 & 0 \\ & (3.95e - 05) & \\ 0 & 0 & 5.9872 \\ & & (.0004) \end{vmatrix} \quad \hat{\sigma} = \begin{vmatrix} .3426 \\ (.0003) \end{vmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_0 = \begin{vmatrix} -.4879, & -7.3149 & -3.5983 \\ (.0313) & (.0112) & (.3330) \end{vmatrix}$$

Finalmente, con los parámetros estimados y las variables de estado conocidas se pueden obtener los coeficientes  $\hat{A}_{k+1}$  y  $\hat{B}'_{k+1}$ , y así obtener las tasas de interés estimadas mediante la ecuación (2). En

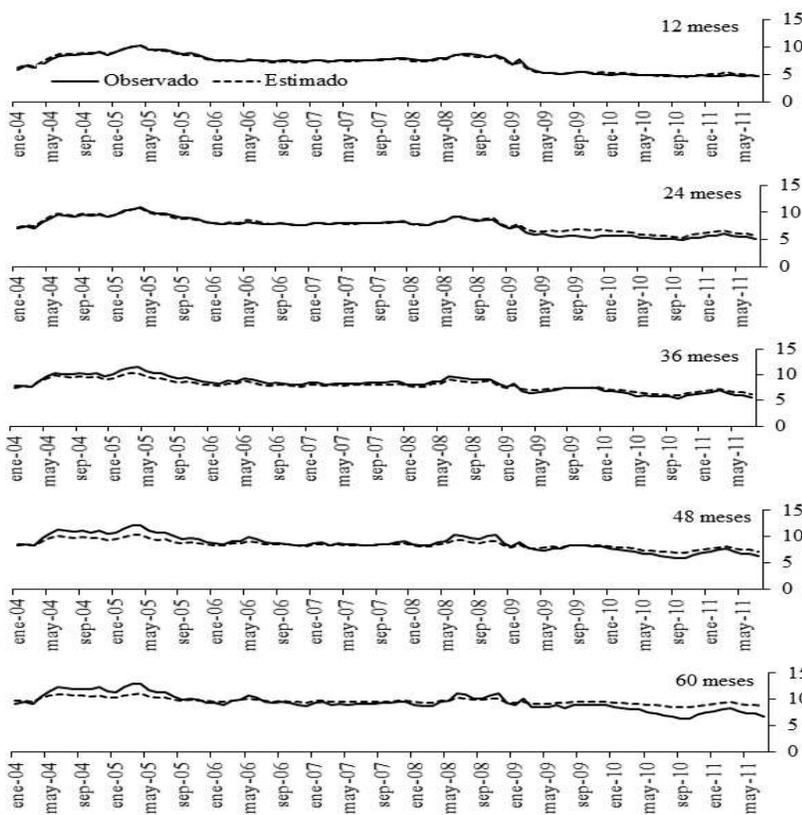
---

número reducido de observaciones (91 meses) para la estimación y los pronósticos de las tasas de interés. Por lo anterior, para obtener un mejor ajuste, el modelo afín con factores exógenos requiere el uso consecutivo de las tasas de interés. En este caso, se incluye en la muestra las tasas de interés desde un mes hasta 5 años de vencimiento, lo cual da 60 tasas de interés para cada mes considerado. Cabe destacar que si se quisiera pronosticar una tasa de interés con vencimiento de 120 meses, entonces se requerirían las tasas de interés con vencimientos que van desde 1 mes hasta 120 meses. Lo que puede hacer la convergencia del modelo muy lenta en el aspecto computacional.

<sup>11</sup> Las restricciones impuestas a las matrices  $\lambda_1$  y  $\Sigma$  son requeridas para identificar los parámetros, ya que se tienen pocos datos observados para realizar la estimación de la estructura temporal de las tasas de interés. Cabe destacar que este tipo de restricciones son muy comunes en la literatura, ver por ejemplo, Ang y Piazzesi (2003); Gimeno y Marques (2009). Lo que se pierde al hacer dicho tipo de restricciones es quitarle un poco de flexibilidad al modelo, en el sentido de que no se está permitiendo interacción entre los vencimientos de las tasas de interés, lo que puede producir una sub(o sobre) estimación de la estructura temporal de las tasas de interés.

la gráfica 6 se muestra el ajuste entre las tasas de interés observadas y las tasas de interés estimadas mediante el modelo afín con factores exógenos, para los vencimientos  $k = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60$  meses.

**Gráfica 6**  
*Series de tiempo de las tasas de interés observadas y estimadas para diferentes vencimientos*



Para verificar el supuesto de que los errores de las variables de estado, y estos de los rendimientos, no están correlacionados, en el cuadro 4 se presentan las correlaciones entre cada uno de los vencimientos con cada variable de estado. Como se puede observar, en general, las correlaciones son pequeñas.

**Cuadro 4**  
*Correlaciones de los errores entre las  
 variables de estado y los rendimientos*

	<i>R 6m</i>	<i>R 12m</i>	<i>R 18m</i>	<i>R 24m</i>	<i>R 30m</i>	<i>R 36m</i>
<i>R X1</i>	-0.14	-0.23	-0.10	0.00	0.09	0.17
<i>R X2</i>	0.15	0.36	0.17	0.09	0.03	-0.07
<i>R X3</i>	0.48	0.32	-0.07	-0.13	-0.06	-0.07

<i>R 42m</i>	<i>R 48m</i>	<i>R 54m</i>	<i>R 60m</i>
0.22	0.27	0.29	0.31
-0.15	-0.23	-0.28	-0.30
-0.02	0.01	0.02	0.02

De la gráfica 6 se puede observar que, en general, el modelo afín con factores exógenos replica bien las tasas de interés para diferentes vencimientos. Aunque, para vencimientos de más largo plazo (54 a 60 meses) el modelo sobreestima las tasas de interés al final de la muestra y subestima al principio de dicha muestra.<sup>12</sup> Sin embargo, para vencimientos de corto y mediano plazo (12, 24 y 36 meses) el modelo ajusta bien los datos observados de las tasas de interés. Además, para las tasas de muy corto plazo (6 meses) el modelo parece subestimar un poco los datos observados.

Para complementar el análisis, en el cuadro 5 se presentan indicadores que miden el ajuste del modelo con respecto a los datos observados. Para ello, se calculan el error absoluto medio (EAM), el porcentaje de error absoluto medio (PEAM) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE).<sup>13</sup>

Del cuadro 5 se observa que, precisamente, los vencimientos que peores ajustes tienen son los de 54 y 60 meses. Aunque sus porcentajes de errores absolutos medios, en promedio, son menores a 9 por ciento. Es decir, si tuviéramos 100 observaciones, en promedio, nueve no

<sup>12</sup> Parte de la sobre o sub estimación de las tasas de interés de más largo plazo se debe a que, para construir las, se utilizan los coeficientes  $\hat{A}_k$  y  $\hat{B}'_k$ , y éstos son obtenidos recursivamente. De manera intuitiva dichos coeficientes para los vencimientos de más largo plazo acarrearán el error o desajuste de todos los vencimientos anteriores.

<sup>13</sup>  $EAM = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \hat{x}_i|}{N}$ ;  $PEAM = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \hat{x}_i|}{|x_i|}}{N}$ ;  $RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$ .

ajustarían los datos observados. Para los otros rendimientos el ajuste es mejor.

Dado el ajuste del modelo, éste se utiliza para pronosticar las tasas de interés fuera de muestra para diferentes vencimientos y horizontes de tiempo.

**Cuadro 5**  
*Errores del ajuste del modelo afín  
con factores exógenos*

<i>Vencimientos (meses)</i>	<i>EAM</i>	<i>PEAM (%)</i>	<i>RMSE</i>
6	0.5488	8.2741	0.5741
12	0.1708	2.5788	0.2067
18	0.3188	5.5954	0.4480
24	0.3202	5.2174	0.4528
30	0.3403	4.6268	0.3794
36	0.4525	5.5367	0.5100
42	0.5260	6.0466	0.6271
48	0.5880	5.5666	0.7411
54	0.6300	7.0263	0.8226
60	0.7944	8.9528	0.9736

## 5. Pronósticos fuera de muestra

El que un modelo tenga un buen ajuste dentro de muestra no significa que es el que proporciona los mejores pronósticos. De esta forma, una métrica clave para evaluar si un modelo, en particular de la estructura temporal de las tasas de interés, es adecuado para pronosticar es el pronóstico fuera de muestra. Por lo general, para estimar pronósticos fuera de muestra se divide el periodo de estudio en dos sub periodos. El primero se utiliza para estimar los parámetros del modelo y el segundo es considerado para evaluar el desempeño del pronóstico.

Para llevar a cabo los pronósticos fuera de muestra se considera el método iterativo o dinámico debido a que, en la literatura,<sup>14</sup>

<sup>14</sup> Es decir, se obtiene el pronóstico para  $y_{t+h}=a+by_{t+h}+e_{t+h}$  en forma recursiva a partir del modelo  $y_{t+1}=a+by_t+e_{t+1}$ .

los pronósticos realizados mediante los modelos afines utilizan dicho método, ya que es importante conservar la estructura del modelo afín en los pronósticos (para más detalles se puede consultar Mönch, 2005; Diebold y Li, 2006; Christensen, Diebold y Rudebusch, 2007; De Pooter, Ravazzolo y van Dijk, 2010).

Por lo tanto, para pronosticar las tasas de interés mediante el modelo afín, se utilizan los coeficientes estimados  $\hat{A}_k$  y  $\hat{B}'_k$ , así como el valor esperado de los factores,  $E_t[X_{t+h}]$ , es decir, se estima el valor esperado de la tasa de interés en el horizonte de tiempo  $t+h$  para el vencimiento  $k$  como:

$$E_t \left[ \hat{y}_{t+h}^{(k)} \right] = -\frac{1}{k} (\hat{A}_k + \hat{B}'_k E_t [X_{t+h}]) \quad (8)$$

Para ser consistente con la literatura y conservar la estructura del modelo afín, el pronóstico de las variables de estado,  $E_t[X_{t+h}]$ , se hace iterativamente mediante dos métodos, un VAR(1) y un AR(1) (ver Diebold y Li, 2006).

*i)* A través del proceso recursivo del VAR(1) la esperanza de los factores en  $t+h$  está dada por:

$$E_t [X_{t+h}] = (I + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{h-1})\mu + \phi^h X_t$$

*ii)* Al considerar las variables de estado como variables individuales y estimar un AR(1) para cada una de ellas:

$$E_t [X_{t+h}^i] = (1 + \gamma_i + \gamma_i^2 + \dots + \gamma_i^{h-1})\mu + \gamma_i^h X_t^i, \quad i = 1, 2, 3$$

De acuerdo con evidencia empírica (Diebold y Li, 2006), se ha encontrado que el pronosticar los factores o variables de estado,  $X_t$ , mediante un modelo AR es mejor que utilizar un modelo VAR. Esto se debe a que, cuando se considera un VAR, el número de parámetros a estimar es mayor que cuando se tiene un AR. Además, puede suceder que los factores en corte transversal no estén altamente correlacionados. No obstante, por otro lado, la dinámica de los factores o variables

de estado fueron estimados mediante un VAR(1). Así, para ser consistentes tanto con la literatura como con la estimación original en el artículo se analizan ambos casos.

5.1. Modelos competitivos de referencia

Un modelo será competitivo con respecto a otro modelo si estadísticamente proporciona pronósticos similares. Para verificar si el modelo afín con factores exógenos es competitivo o incrementa la habilidad de pronóstico se compara el pronóstico de las tasas de interés fuera de muestra *versus* los siguientes cuatro modelos estimados con datos observados.

a) *Tasas forward.* Para su estimación se utiliza la fórmula:

$$f_t^{(i \text{ periodo} \rightarrow j \text{ periodo})} = \left[ \frac{(1 + y_t^{(j \text{ periodo})})^j}{(1 + y_t^{(i \text{ periodo})})^i} \right]^{1/(j-i)} - 1$$

con  $i < j$  los vencimientos de las tasas de interés,  $y_t^{(j)}$ . Como insumo se utilizan las tasas de interés de bonos cupón cero observadas a diferentes vencimientos.

b) *Trayectoria fija o caminata aleatoria.* Se considera una trayectoria fija para todo el horizonte de pronóstico, es decir, las tasas de interés son pronosticadas mediante la relación  $y_{t+h}^{(k)} = y_t^{(k)} + \varepsilon_{t+h}^{(k)}$  para todo,  $h$ , el horizonte de pronóstico y,  $k$ , el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada.

c) *Modelo VAR(1).* Los componentes del VAR están dados por  $Y_t = [y_t^{(k)}, y_t^{(3)}, y_t^{(30)}, y_t^{(120)}]$  con  $k = 12, 18, 24$  meses los vencimientos de las tasas de interés a ser pronosticadas y  $y_t^{(3)}, y_t^{(30)}$ , y  $y_t^{(120)}$  las tasas de interés de los bonos cupón cero con vencimientos de 3, 30 y 120 meses, respectivamente. Para el caso de la tasa de interés con vencimiento de 36 y 60 meses, el VAR considerado es  $Y_t = [y_t^{(36)}, y_t^{(1)}, y_t^{(3)}, y_t^{(90)}]$  y  $Y_t = [y_t^{(60)}, y_t^{(3)}, y_t^{(36)}, y_t^{(90)}]$ , respectivamente. La ecuación que se utiliza para su estimación y pronóstico es  $Y_t = \alpha_k + \beta_k Y_{t-1} + \varepsilon_t^{(k)}$ , con  $k = 1, 12, 24, 36, 60$  meses. Cabe destacar

que, por consistencia, en este caso también se utiliza el modelo iterativo para que sea comparable con el modelo afín.<sup>15</sup>

d) *Modelo autorregresivo estándar AR(1)*. La ecuación a utilizar es  $y_t^{(k)} = a_k + b_k y_{t-1}^{(k)} + e_t^{(k)}$ , con  $k = 1, 12, 24, 36, 60$  meses los vencimientos de las tasas de interés a ser pronosticadas. Análogo al modelo anterior, por consistencia, en este caso también se utiliza el método iterativo para que sea comparable con el modelo afín.<sup>16</sup>

## 5.2. Estimación de los pronósticos fuera de muestra

Para ilustrar como se realizaron los pronósticos fuera de muestra, se considera el caso de un horizonte de pronóstico de 12 meses. Para ello, se utilizan los datos de enero de 2004 a enero de 2008, como el periodo de estimación de los modelos, y de enero de 2009 a diciembre de 2010 (24 predicciones) como el periodo fuera de muestra que se usará para realizar los pronósticos de la estructura temporal de las tasas de interés. Además, se utiliza una ventana móvil para estimar los parámetros de cada modelo, basada en la idea de tener siempre la información más reciente al momento de realizar el pronóstico.<sup>17</sup>

Por ejemplo, para predecir la tasa de interés correspondiente a enero de 2009 se consideran los datos para estimar los modelos de enero de 2004 a enero de 2008. Análogamente, para el siguiente mes se toma el periodo de muestra para estimar los modelos de febrero de 2004 a febrero de 2008 y así predecir la correspondiente tasa de interés en febrero de 2009. El procedimiento se hace sucesivamente hasta obtener las 24 predicciones requeridas.

Por otro lado, para horizontes más largos (18 y 24 meses), se tiene que disminuir el tamaño de la muestra que se utiliza para estimar los modelos de manera que siempre se mantengan 24 predicciones fuera de muestra. Los vencimientos de las tasas de interés a pronosticar

---

<sup>15</sup> Se contempló un solo rezago porque, por un lado, fue el único rezago que salió estadísticamente significativo y, por otro, es consistente con el modelo afín considerado.

<sup>16</sup> Análogo al caso del VAR, se tomó un solo rezago porque, por una parte, fue el único rezago que salió estadísticamente significativo y además es consistente con el modelo afín considerado.

<sup>17</sup> Debido a que se pueden observar cambios importantes en los niveles de las tasas de interés (ver gráfica 1) durante el periodo de análisis, Giacomini y White (2006) recomiendan utilizar este método.

son 1, 12, 24, 36 y 60 meses y los horizontes de pronóstico son 12, 18 y 24 meses.

Para examinar qué método es el que tiene un mejor desempeño en pronosticar la estructura temporal de las tasas de interés para los vencimientos selectos en los diferentes horizontes de pronóstico se consideran los RMSES de cada modelo.

Cabe mencionar que, en los casos en que los errores cuadráticos (EC)<sup>18</sup> entre el valor observado y el valor pronosticado eran muy grandes se utilizó la técnica aplicada por Yu y Zivot (2011), en la que se considera el método de interpolación para sustituir predicciones extremas. En la estimación de los RMSES de este artículo la interpolación de los casos extremos se hace sobre los errores cuadráticos medios de cada pronóstico, para mantener así la muestra original de 24 errores cuadráticos en cada horizonte de pronóstico y vencimiento seleccionado.<sup>19</sup>

En los cuadros 6 y 7 se presenta la comparación de los RMSES de los pronósticos fuera de muestra para los diferentes métodos considerados. Para facilitar la lectura de los resultados se exhibe el error relativo entre los RMSES de los pronósticos de los modelos competitivos (columnas 4-7 y 4a-7a) *versus* los RMSES de aquéllos obtenidos de los modelos afines (columnas 2-3 y 2a-3a). Así, valores mayores a uno implicarán que el modelo competitivo tuvo un peor desempeño en la predicción de las tasas de interés que el respectivo modelo afín y, por consiguiente, valores menores a uno corresponderán a un mejor desempeño del modelo competitivo. Es de señalar que CP + Afín corresponde a los modelos afines con variables exógenas.

Adicionalmente, para reforzar los resultados se realizan pruebas estadísticas en las que se compara si los pronósticos de los modelos afines son iguales que los pronósticos obtenidos de los otros cuatro modelos considerados: las tasas forward, la trayectoria fija, el VAR(1) y el AR(1) (todos estimados con datos observados). Para ello, se utiliza el estadístico de prueba de Harvey, Leybourne y Newbold (1997), en adelante HLN. Además, para el caso en que los modelos comparados sean anidados se considera el estadístico propuesto por Clark y

---

<sup>18</sup>  $EC = (x_i - \hat{x}_i)^2$  con  $x_i$  el valor realizado y  $\hat{x}_i$  el valor pronosticado.

<sup>19</sup> El ajuste es recomendado para este tipo de análisis y así eliminar observaciones extremas que podrían meter ruido o sesgar los EC. Para este caso, los resultados no cambian de manera significativa si se consideran dichas observaciones. Como prueba adicional fueron estimados quitando los errores cuadráticos extremos y los resultados también son similares, los cuales pueden solicitarse al autor.

McCracken (2001, 2010), en adelante CM. La estimación de estos estadísticos aparecen como asteriscos en los cuadros 6 y 7, en los que uno y dos asteriscos (\* y \*\*) representan el rechazo de la hipótesis nula de que los pronósticos de los dos modelos comparados son iguales a 5% y 10 de significancia, respectivamente. Más aún, en los cuadros A.1 y A.2 del apéndice se muestran explícitamente los valores de dichos estadísticos de prueba, según sea su caso de aplicación.

Al comparar entre los dos modelos afines se tiene que, el modelo afín-VAR (columna 2 del cuadro 6), tiene un mejor desempeño que el modelo afín-AR (columna 3a del cuadro 7). En promedio, el primer modelo afín tiene menores RMSEs que el segundo modelo afín mencionado. Aunque, de acuerdo con el estadístico CM en un horizonte de 18 y 24 meses, los pronósticos de estos modelos son similares para los diversos vencimientos analizados, con excepción del vencimiento a 60 meses, en cuyo caso el primer modelo afín es mejor. No obstante, para un horizonte de 12 meses, el segundo modelo afín proporciona mejores pronósticos que el primero.

En general, los pronósticos de las tasas de interés fuera de muestra obtenidos mediante los modelos afines (cuadros 6 y 7) generan, en promedio, mejores resultados que las tasas forward (columnas 4 y 4a). Es decir, la mayoría de los RMSEs de los modelos afines son menores que los de las tasas forward para los tres horizontes pronosticados, así como para todas las tasas de interés con vencimientos seleccionados de 1, 12, 24, 36 y 60 meses. El estadístico HLN refuerza estos hallazgos, excepto el vencimiento a 1 mes para los horizontes de 12 y 18 meses, en el cual proporciona igualdad de pronósticos.

Para el modelo afín-AR (cuadro 7), se tiene que sus RMSEs, en promedio, son menores que los de un VAR(1) que utiliza las tasas de interés observadas (columna 6a). Sin embargo, el estadístico HLN muestra igualdad de pronósticos para los horizontes de 12 y 18 meses para casi todos los vencimientos y en el horizonte de 24 meses solo para los vencimientos de 24 y 36 meses. Además, el modelo afín de igual manera proporciona, en promedio, pronósticos comparables con el AR(1) que utiliza las tasas de interés observadas (columna 7a). Lo que es reforzado con el estadístico HLN, con excepción de los vencimientos a 24 meses para los horizontes de 12 y 24 meses y a 60 meses para los tres horizontes considerados. Por su parte, la trayectoria fija (columna 5a) proporciona menores RMSEs que el modelo afín. Sin embargo, siete de los 15 pronósticos son iguales de acuerdo con el estadístico HLN, en otros siete gana la trayectoria fija y en uno el modelo afín.<sup>20</sup>

<sup>20</sup> Los estadísticos de prueba HLN y CM pueden consultarse en el cuadro A.2

Con respecto al buen desempeño que tiene el modelo afín-VAR (cuadro 6), se tiene que para los tres horizontes de pronóstico, en promedio, proporciona pronósticos comparables de acuerdo con el estadístico HLN con el VAR(1) y el AR(1) que utilizan tasas de interés observadas (columnas 6 y 7, respectivamente), excepto de la tasa de interés a 60 meses para el AR(1). Asimismo, el modelo afín también es comparable, en promedio y al usar el estadístico HLN, con la trayectoria fija (columna 5) y es mejor para el vencimiento de 60 meses en los horizontes de 18 y 24 meses.<sup>21</sup>

Para resumir y al considerar el resultado de las pruebas de hipótesis correspondientes se tiene que, en particular, el modelo afín-VAR proporciona pronósticos similares a un VAR(1) y un AR(1) para todos los vencimientos, con excepción del vencimiento a 60 meses para el horizonte de 24 meses, en el cual dicho modelo afín tiene un mejor desempeño. Adicionalmente, aunque la trayectoria fija presente menores RMSEs que el modelo afín-VAR, la prueba de hipótesis HLN sugiere que ambos modelos, en promedio, tienen pronósticos comparables para casi todos los vencimientos y los tres horizontes de pronóstico, excepto para el vencimiento a 60 meses el cual resulta mejor en el modelo afín para los horizontes de 18 y 24 meses.

---

del apéndice.

<sup>21</sup> Los estadísticos de prueba HLN pueden consultarse en el cuadro A.1 del apéndice.

### Cuadro 6

*Error relativo entre cada uno de los modelos competitivos y el modelo afín- $VAR(1)$ §*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<i>Vencimiento en meses</i>	<i>CP + Afín pronóstico de las variables de estado con VAR(1)<sup>1/</sup></i>	<i>CP + Afín pronóstico de las variables de estado con AR(1)<sup>2/</sup></i>	<i>Tasas forward<sup>3/</sup></i>	<i>Trayectoria fija<sup>4/</sup></i>	<i>VAR(1)<sup>5/</sup></i>	<i>AR(1)<sup>6/</sup></i>
<i>Panel A: predicción 12 meses hacia adelante</i>						
1	2.075	1.056	1.146	0.910	1.094	1.049
12	1.988	0.884**	1.012	0.819	1.040	0.867
24	1.886	0.981**	1.414**	0.750**	1.084	0.826*
36	1.403	0.966**	1.816**	0.809	1.691	1.067
60	1.555	1.019**	1.721**	0.898	1.436	1.223*
<i>Panel B: predicción 18 meses hacia adelante</i>						
1	2.808	1.037	1.163	0.876	0.956	0.943
12	2.891	0.832	1.365**	0.793	0.899	0.846
24	2.634	0.959	1.481**	0.781*	1.233	0.856
36	2.123	1.013	1.836**	0.805**	0.951	0.975
60	1.622	1.117**	2.346**	1.162*	1.021	1.263**
<i>Panel C: predicción 24 meses hacia adelante</i>						
1	2.865	1.100	1.603**	1.019	0.953	1.059
12	2.683	1.068	1.665**	1.027	1.020	1.050*
24	2.577	1.050**	1.790**	0.974	1.147	1.010

**Cuadro 6**  
(continuación)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Vencimiento en meses	CP + Afín pronóstico de las variables de estado con VAR(1) <sup>1/</sup>	CP + Afín pronóstico de las variables de estado con AR(1) <sup>2/</sup>	Tasas forward <sup>3/</sup>	Trayectoria fija <sup>4/</sup>	VAR(1) <sup>5/</sup>	AR(1) <sup>6/</sup>
36	2.229	1.047	2.047**	0.954	1.240	1.000
60	1.835	1.036**	2.406**	1.208**	1.562**	1.106**

Notas: § El error relativo (columnas de la 3 a la 7) se obtiene como: el RMSE del modelo competitivo entre el RMSE del modelo afin-VAR(1). Un valor mayor que uno implica un peor desempeño del modelo competitivo, mientras que un valor menor que uno corresponderá a un mejor desempeño del modelo competitivo. La columna 2 corresponde a los RMSEs del modelo afin a ser comparado con los otros modelos competitivos.

Uno y dos asteriscos (\* y \*\*) indican el rechazo de la hipótesis nula, de que los dos modelos comparados son iguales a 10% y 5% de significancia, respectivamente. Para los modelos de las columnas 4-7 se utilizó la prueba de hipótesis de Harvey, Leybourne y Newbold (1997). En tanto que para la comparación de los modelos 2-3 se utilizó la prueba de Clark y McCracken (2001, 2010), ya que estos modelos pueden considerarse anidados.

1/Corresponde al modelo afin con factores exógenos estimados mediante componentes principales (CP). Para las estimaciones se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 60 meses. Las variables de estado son pronosticadas en conjunto con un VAR(1).

2/Corresponde al modelo afin con factores exógenos estimados mediante componentes principales (CP). Para las estimaciones se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 60 meses. Cada variable de estado es pronosticada con un AR(1).

3/Las tasas forward se estimaron con datos observados de las tasas de interés de bonos cupón cero mediante la fórmula:

$$f_t^{(i \text{ periodo} \rightarrow j \text{ periodo})} = \left[ \frac{(1+y_t^{(j \text{ periodo})})^j}{(1+y_t^{(i \text{ periodo})})^i} \right]^{1/(j-i)} - 1 \text{ con } i < j \text{ vencimientos de las tasas de interés } (y_t).$$

4/El pronóstico fuera de muestra de una trayectoria fija se estimó mediante la relación  $y_{t+h}^{(k)} = y_t^{(k)} + \varepsilon_{t+h}^{(k)}$  para todo  $h$  el horizonte de pronóstico y  $k$  el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada.

5/Para la estimación y el pronóstico del VAR(1) se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con  $Y_t = [y_t^{(k)}, y_t^{(3)}, y_t^{(30)}, y_t^{(120)}]$  donde  $k$  es el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada,  $k = 1, 12, 24$  meses con  $y_t^{(3)}, y_t^{(30)}$  y  $y_t^{(120)}$ , las tasas de interés con vencimientos de 3, 30 y 120 meses, respectivamente. Para el caso de la tasa de interés con vencimiento de 36 y 60 meses los VAR utilizados fueron  $Y_t = [y_t^{(36)}, y_t^{(1)}, y_t^{(3)}, y_t^{(90)}]$  y  $Y_t = [y_t^{(60)}, y_t^{(3)}, y_t^{(36)}, y_t^{(90)}]$ , respectivamente. La ecuación que se considera para su estimación y pronóstico es  $Y_t = \alpha_k + \beta_k Y_{t-1} + \varepsilon_t^{(k)}$ , con  $k = 1, 12, 24, 36, 60$  meses.

6/Es un modelo autorregresivo que considera el nivel de la tasa de interés observada. Las tasas de interés utilizadas fueron de 1, 12, 24, 36 y 60 meses de vencimiento. La ecuación que se considera en este modelo para la estimación y el pronóstico es  $y_{t+h}^{(k)} = a_k y_t^{(k)} + b_k + \varepsilon_{t+h}^{(k)}$   $y_t^{(k)} = a_k + b_k y_{t-1}^{(k)} + e_t^k$  con  $k = 1, 12, 24, 36, 60$  meses.

### Cuadro 7

*Error relativo entre cada uno de los modelos competitivos y el modelo afín-AR(1)§*

(1a)	(2a)	(3a)	(4a)	(5a)	(6a)	(7a)
Vencimiento en meses	CP + Afín pronóstico de las variables de estado con VAR(1) <sup>1/</sup>	CP + Afín pronóstico de las variables de estado con AR(1) <sup>2/</sup>	Tasas forward <sup>3/</sup>	Trayectoria fija <sup>4/</sup>	VAR(1) <sup>5/</sup>	AR(1) <sup>6/</sup>
<i>Panel A: predicción 12 meses hacia adelante</i>						
1	0.947	2.192	1.085	0.861**	1.036	0.993
12	1.131**	1.757	1.145**	0.927	1.177	0.981
24	1.020**	1.849	1.442**	0.765	1.106	0.843**
36	1.035**	1.355	1.881**	0.838**	1.751*	1.105
60	0.981**	1.585	1.689**	0.881**	1.409	1.200**
<i>Panel B: predicción 18 meses hacia adelante</i>						
1	0.964	2.914	1.121	0.845**	0.922	0.909
12	1.202	2.405	1.640**	0.953	1.081	1.017
24	1.042	2.528	1.544**	0.814**	1.285	0.893**
36	0.988	2.149	1.814**	0.795**	0.939	0.963
60	0.894*	1.812	2.099**	1.040	0.914	1.130*
<i>Panel C: predicción 24 meses hacia adelante</i>						
1	0.909	3.150	1.458**	0.927*	0.866**	0.963
12	0.936	2.865	1.559**	0.961	0.956*	0.984
24	0.950**	2.712	1.702**	0.926	1.091	0.960

**Cuadro 7**  
(continuación)

(1a)	(2a)	(3a)	(4a)	(5a)	(6a)	(7a)
Vencimiento en meses	CP + Afín pronóstico de las variables de estado con VAR(1) <sup>1/</sup>	CP + Afín pronóstico de las variables de estado con AR(1) <sup>2/</sup>	Tasas forward <sup>3/</sup>	Trayectoria fija <sup>4/</sup>	VAR(1) <sup>5/</sup>	AR(1) <sup>6/</sup>
36	0.955	2.334	1.956**	0.912	1.185	0.955*
60	0.965**	1.901	2.323**	1.166*	1.508**	1.068*

Notas: § El error relativo (columnas de 2a y de la 4a a la 7a) se obtiene como: el RMSE del modelo competitivo entre el RMSE del modelo afín-AR(1). Un valor mayor que uno implica un peor desempeño del modelo competitivo, mientras que un valor menor que uno corresponderá a un mejor desempeño del modelo competitivo. La columna 3a corresponde a los RMSEs del modelo afín a ser comparado con los otros modelos competitivos.

Uno y dos asteriscos (\* y \*\*) indican el rechazo de la hipótesis nula, de que los dos modelos comparados son iguales a 10% y 5% de significancia, respectivamente. Para los modelos de las columnas 4a-7a se utilizó la prueba de hipótesis de Harvey, Leybourne y Newbold (1997). En tanto que para la comparación de los modelos 2a-3a se utilizó la prueba de Clark y McCracken (2001, 2010), ya que estos modelos pueden considerarse anidados.

1/Corresponde al modelo afín con factores exógenos estimados mediante componentes principales (CP). Para las estimaciones se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 60 meses. Las variables de estado son pronosticadas en conjunto con un AR(1).

2/Corresponde al modelo afín con factores exógenos estimados mediante componentes principales (CP). Para las estimaciones se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con vencimientos de 1 a 60 meses. Cada variable de estado es pronosticada con un AR(1).

3/Las tasas forward se estimaron con datos observados de las tasas de interés de bonos cupón cero mediante la fórmula:

$$f_t^{(i \text{ periodo} \rightarrow j \text{ periodo})} = \left[ \frac{(1+y_t^{(j \text{ periodo})})^j}{(1+y_t^{(i \text{ periodo})})^i} \right]^{1/(j-i)} - 1 \text{ con } i < j \text{ vencimientos de las tasas de interés } (y_t).$$

4/El pronóstico fuera de muestra de una trayectoria fija se estimó mediante la relación  $y_{t+h}^{(k)} = y_t^{(k)} + \varepsilon_{t+h}^{(k)}$  para todo  $h$  el horizonte de pronóstico y  $k$  el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada.

5/Para la estimación y el pronóstico del VAR(1) se utilizaron las tasas de interés de bonos cupón cero con  $Y_t = [y_t^{(k)}, y_t^{(3)}, y_t^{(30)}, y_t^{(120)}]$  donde  $k$  es el vencimiento de la tasa de interés a ser pronosticada,  $k = 1, 12, 24$  meses con  $y_t^{(3)}, y_t^{(30)}$  y  $y_t^{(120)}$ , las tasas de interés con vencimientos de 3, 30 y 120 meses, respectivamente. Para el caso de la tasa de interés con vencimiento de 36 y 60 meses los VAR utilizados fueron  $Y_t = [y_t^{(36)}, y_t^{(1)}, y_t^{(3)}, y_t^{(90)}]$  y  $Y_t = [y_t^{(60)}, y_t^{(3)}, y_t^{(36)}, y_t^{(90)}]$ , respectivamente. La ecuación que se considera para su estimación y pronóstico es  $Y_t = \alpha_k + \beta_k Y_{t-1} + \varepsilon_t^{(k)}$ , con  $k = 1, 12, 24, 36, 60$  meses.

6/Es un modelo autorregresivo que considera el nivel de la tasa de interés observada. Las tasas de interés utilizadas fueron de 1, 12, 24, 36 y 60 meses de vencimiento. La ecuación que se considera en este modelo para la estimación y el pronóstico es:  $y_{t+h}^{(k)} = a_k y_t^{(k)} + b_k + \varepsilon_{t+h}^{(k)}$   $y_t^{(k)} = a_k + b_k y_{t-1}^{(k)} + \varepsilon_t^k$  con  $k = 1, 12, 24, 36, 60$  meses.

## 6. Conclusiones

En el estudio se mostró que al utilizar un modelo afín con factores exógenos (estimados mediante la técnica de componentes principales), el cual incluye la condición de no arbitraje y aversión al riesgo, proporciona un buen ajuste dentro de muestra de la estructura temporal de las tasas de interés en México, sobre todo para los vencimientos de corto y mediano plazo.

Adicionalmente, el modelo afín incrementa el desempeño de sus pronósticos fuera de muestra en horizontes de 24 meses, en especial para el vencimiento de más largo plazo considerado, es decir 60 meses. Sin embargo, para horizontes de corto y mediano plazo, en promedio y de acuerdo con los estadísticos HLN y CM, es competitivo con los pronósticos de los otros tres modelos de referencia, tales como el AR(1), el VAR(1) y la trayectoria fija (o caminata aleatoria), estimados con datos observados, con excepción de la trayectoria fija para los vencimientos de 24 y 36 meses. En general, el modelo afín proporciona mejores pronósticos que las tasas *forward*.

Una explicación de por qué los modelos afines predicen mejor los vencimientos de largo plazo en horizontes largos se debe a que éstos incluyen aversión al riesgo en la estimación de la estructura temporal de las tasas de interés, lo que los hace más robustos en ambientes de inestabilidad de parámetros, no linealidades y no normalidad (ver Yu y Zivot, 2011).

Cabe destacar que otras ventajas de los modelos afines son que, por un lado, pueden ser extendidos de tal manera que se puedan incorporar factores macroeconómicos y financieros, lo cual podría ayudar a mejorar el pronóstico fuera de muestra. En tanto que, por otro lado, se pueden estimar y pronosticar rendimientos que no están específicamente incorporados dentro de la muestra, por ejemplo, los vencimientos a 9, 15, 25, 33, 59 meses, entre otros.

### *Agradecimientos*

La autora agradece los comentarios y sugerencias de Santiago García, Jessica Roldán, Daniel Sámano y dictaminadores anónimos. El contenido del artículo es responsabilidad exclusiva de la autora y no refleja la opinión de la institución a la que pertenece. melizondo@banxico.org.mx.

## Referencias

- Ang, A., G. Bekaert y M. Wei. 2007. The term structure of real rates and expected inflation, NBER, Working Paper Series, núm. 12930.
- Ang, A. y M. Piazzesi. 2003. A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables, *Journal of Monetary Economics*, 50: 745-787.
- Christensen, J., F. Diebold y G. Rudebusch. 2007, The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models, Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Paper Series, núm. 2007-20.
- Clark, T. y M. McCracken. 2001. Test of equal forecast accuracy and encompassing for nested models, *Journal of Econometrics*, 105: 85-110.
- . 2010. Testing for unconditional predictive ability, Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Paper Series, núm. 2010-031A.
- Cortés, J., M. Ramos-Francia y A. Torres. 2008. Un análisis empírico de la estructura temporal de tasas de interés en México, Banco de México, documento de investigación, núm. 2008-07.
- Cortés, J. y M. Ramos-Francia. 2008, Un modelo macroeconómico de la estructura temporal de tasas de interés en México, Banco de México, documento de investigación, núm. 2008-10.
- Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross. 1985, A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 53: 385-407.
- Dai, Q. y K. Singleton. 2000. Specification analysis of affine term structure models, *Journal of Finance*, 55: 1943-1978.
- De Pooter, M., F. Ravazzolo y D. van Dijk. 2010. Term structure forecasting using macro factors and forecast combination, Board of Governors of the Federal Reserve System, International Finance Discussion Papers, núm. 993.
- Diebold, F. y C. Li. 2006. Forecasting the term structure of government bond yields, *Journal of Econometrics*, 130: 337-364.
- Duffie, D. y R. Kan. 1996. A yield-factor model of interest rates, *Mathematical Finance*, 6: 379-406.
- Favero, C., L. Niu y L. Sala. 2007. Term structure forecasting: No-arbitrage restrictions vs. large information Set, CEPR, International Macroeconomics Discussion Paper Series, núm. 6206.
- Giacomini, R. y H. White. 2006. Test of conditional predictive ability, *Econometrica*, 74(6): 1545-1578.
- Gimeno, R. y J. Marques. 2009. Extraction of financial market expectations about inflation and interest rates from market, Banco de España, documento de trabajo, núm. 0906.
- Harvey, D., S. Leybourne y P. Newbold. 1997. Testing the equality of prediction mean squared errors, *International Journal of Forecasting*, 13: 281-291.
- Jolliffe, I. 2002. *Principal Component Analysis*, Springer Series in Statistics, 2da. edición.
- Mönch, E. 2005. Forecasting the yield curve in a data-rich environment: A no-arbitrage factor-augmented VAR approach, European Central Bank, Working Paper Series, núm. 544.
- Nelson, C. y A. Siegel. 1987. Parsimonious modeling of yield curve, *Journal of Business*, 60: 473-489.

- Sethi, R. 2008. New Zealand zero-coupon yield curves: A principal-components analysis, Bank for International Settlements or the Reserve Bank of New Zealand (mimeo).
- Svensson, L. 1994. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, IMF, Working Paper, núm. 94/114.
- Tipping, M. y C. Bishop. 1999. Probabilistic principal component analysis, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 61(3): 611-622.
- Valuación Operativa y Referencias de Mercado S.A. de C.V. (Valmer). *Bases de datos*, varios años, Grupo BMV, Ciudad de México, México.
- Vasicek, O. 1977. An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Finance Economics*, 37: 177-188.
- Yu, W. y E. Zivot. 2011. Forecasting the term structures of treasury and corporate yields using dynamic Nelson-Siegel models, *International Journal of Forecasting*, 27(2): 579-591.

## Apéndice

**Cuadro A.1**  
*Comparación de pronósticos fuera de muestra  
 para el modelo Afín-VAR*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Vencimiento en meses	<i>CP + Afín pronóstico de las variables de estado con VAR(1) versus</i>			
	<i>Tasas forward</i>	<i>Trayectoria fija</i>	<i>VAR(1)</i>	<i>AR(1)</i>
<i>Panel A: predicción 12 meses hacia adelante</i>				
1	-0.6198	0.562	-1.464	-0.273
12	-0.1051	1.142	-0.567	0.784
24	-2.884**	4.275**	-0.525	1.988*
36	-3.392**	1.634	-1.553	-0.441
60	-2.844**	0.672	-1.276	-1.934*
<i>Panel B: predicción 18 meses hacia adelante</i>				
1	-0.170	0.974	0.684	0.403
12	-4.683**	1.148	1.150	0.881
24	-10.654**	2.043*	-1.053	1.420
36	-9.393**	2.283**	0.617	0.957
60	-6.081**	-1.724*	-0.247	-2.175**
<i>Panel C: predicción 24 meses hacia adelante</i>				
1	-9.899**	-0.465	1.698	-1.203
12	-10.202**	-0.588	-1.034	-1.938*
24	-6.233**	0.557	-1.202	-0.319
36	-5.644**	1.017	-1.121	-0.004
60	-4.635**	-2.246**	-2.357**	-2.404**

Notas: En el cuadro se presenta el estadístico de Harvey, Leybourne y Newbold (1997), que compara si dos pronósticos son iguales o diferentes. En este caso, se comparan los pronósticos del modelo afín cuyas variables de estado son pronosticadas con un VAR(1) *versus* los pronósticos de los siguientes modelos: la tasa *forward*, la trayectoria fija, el VAR(1) y el AR(1) estimados con datos observados. En particular, la hipótesis nula a probar es que los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes tienen el mismo error cuadrático medio (ECM) *versus* la hipótesis alternativa de que los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes tienen distintos ECM. Lo que corresponde a una prueba de dos colas. Uno y dos asteriscos denotan el rechazo de la hipótesis nula a un nivel,  $\alpha$ , de 10% y 5% de significancia, respectivamente, es decir, la región crítica o de rechazo está dada por  $R.C. = \{ S_1 \mid |S_1| \geq Z_{\alpha/2} \}$  con  $S_1$  es

estadístico de prueba (número reportado en el cuadro)  $Z_{0.05(23)}=1.7139$  y  $Z_{0.25(23)}=2.069$  que corresponde a la probabilidad acumulada de una distribución *t-Student*, entre paréntesis se encuentran los grados de libertad.

**Cuadro A.2**  
*Comparación de pronósticos fuera de muestra  
para el modelo Afín-AR*

(1a)	(2a)	(3a)	(4a)	(5a)	(6a)
Vencimiento en meses	<i>CP + Afín pronóstico de las variables de estado con AR(1) versus</i>				
	<i>Tasas forward 1/</i>	<i>Trayec- toria fija 1/</i>	<i>VAR(1) 1/</i>	<i>AR(1) 1/</i>	<i>CP + Afín pronóstico de las variables de estado con VAR(1)<sup>2/</sup></i>
<i>Panel A: predicción 12 meses hacia adelante</i>					
1	-0.591	2.820**	-0.371	0.103	0.424
12	-3.119**	1.288	-1.530	0.268	9.660**
24	-4.001**	4.151**	-0.588	2.895**	4.218**
36	-5.136*	5.080**	-1.807*	-1.552	7.194**
60	-4.214**	1.369	-1.636	-4.926**	18.926**
<i>Panel B: predicción 18 meses hacia adelante</i>					
1	-1.432	3.246**	0.797	1.416	-0.089
12	-10.109**	0.680	-0.750	-0.269	-0.164
24	-6.686**	3.627**	-0.997	2.568**	-1.390
36	-8.392**	3.010**	0.538	0.908	-0.917
60	-6.578**	-0.511	1.106	-1.973*	16.984**
<i>Panel C: predicción 24 meses hacia adelante</i>					
1	-8.390**	1.836*	4.909**	0.922	-0.644
12	-9.196**	0.678	1.856*	0.435	0.310
24	-5.8701**	1.29	-0.882	1.044	-3.066*
36	-5.622**	1.484	-1.000	1.987*	-2.494
60	-4.638**	-1.806*	-2.257**	-2.388*	7.059**

Notas: 1/ Se presenta el estadístico de Harvey, Leybourne y Newbold (1997), que compara si dos pronósticos provenientes de modelos diferentes son iguales. En este caso, se comparan los pronósticos del modelo afín-AR *versus* los pronósticos de

los siguientes modelos: la tasa *forward*, la trayectoria fija, el VAR(1) y el AR(1). En particular, la hipótesis nula a probar es que los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes tienen el mismo error cuadrático medio (ECM) *versus* la hipótesis alternativa de que los pronósticos provenientes de dos modelos diferentes tienen distintos ECM. Lo que corresponde a una prueba de dos colas. Uno y dos asteriscos denotan el rechazo de la hipótesis nula a un nivel,  $\alpha$ , de 10% y 5% de significancia, respectivamente, es decir, la región crítica o de rechazo está dada por R.C. =  $\{S_1 \mid |S_1| \geq Z_{\alpha/2}\}$  con  $S_1$  es estadístico de prueba (número reportado en el cuadro) y  $Z_{0.05(23)}=1.7139$  y  $Z_{0.25(23)}=2.069$  que corresponde a la probabilidad acumulada de una distribución *t-Student*, entre paréntesis se encuentran los grados de libertad.

2/Ya que ambos modelos afines a comparar tienen la misma estructura, los pronósticos obtenidos de ellos podrían considerarse anidados, así, en este caso, es correcto usar el estadístico de prueba de Clark y McCracken. Igual que la prueba HLN, se compara si los pronósticos de dos modelos diferentes son iguales. Dado que la prueba es más compleja que la de HLN, los detalles se pueden consultar en Clark y McCracken (2001, 2010).