

FINANCIAMIENTO A PRESTATARIOS SOBERANOS: INSTANTÁNEAS DEL MERCADO DE EUROMONEDA CON UNA CÁMARA THOMIANA

Carlos M. Urzúa*

El Colegio de México

y

Woodrow Wilson School, Universidad de Princeton

Resumen

Combinando el análisis teórico con el empírico, en este artículo se examinan los términos (diferenciales) aplicados por el mercado de euromoneda a prestatarios de varios países antes de la crisis mundial de la deuda. Aunque los histogramas de los diferenciales exhiben diversas formas, una distribución simple, la exponencial cuártica, proporciona un excelente ajuste en todas las muestras. Después se ofrece un modelo de concesión de préstamos en el que la distribución de los diferenciales implicada es precisamente la cuártica exponencial. El modelo, que emplea la teoría de catástrofes, también ilustra cómo la conducta optimizadora puede llevar a superficies de respuestas óptimas que exhiben catástrofes elementales.

I. Introducción

Las graves consecuencias de la actual crisis mundial de la deuda, junto con la perenne fascinación que las crisis financieras ejercen en los economistas, han dado origen en los últimos años a muchos estudios sobre el riesgo de conceder préstamos a países soberanos (véase la elegante reseña de Eaton, Gersovitz y Stiglitz, 1986). Casi todos esos estudios, no obstante, se han basado en modelos puramente teóricos o en inspecciones empíricas de los datos agregados. Este trabajo proporciona un estudio teórico-empírico de los términos aplicados por el mercado de euromoneda a prestatarios de varios países antes de la crisis de la deuda.

Más precisamente, en la sección II se examinan los diferenciales (márgenes, sobretasas) sobre la tasa interbancaria en Londres cargados a las enti-

* La versión en inglés está por aparecer en el *International Economic Review*. Este trabajo está basado en los capítulos 3 y 4 de mi tesis doctoral (1986) en la Universidad de Wisconsin en Madison. Estoy en deuda de gratitud con mi asesor William A. Brock por sus útiles comentarios. También agradezco a un jurado anónimo las críticas y sugerencias provechosas. Los errores que persistan son míos.

dades públicas y privadas de seis países. Las muestras son observaciones de corte transversal tomadas sobre un corto periodo (usualmente un año). Aunque los histogramas de los diferenciales exhiben una variedad de formas, una distribución simple, la exponencial cuártica de Fisher, proporciona un ajuste muy bueno en todas las muestras.

En la sección III se ofrece un marco teórico que toma en consideración tales hallazgos empíricos. Primero se presenta un modelo estático en el cual un prestamista elige los diferenciales que minimizan la pérdida esperada. Puesto que esta última es parametrizada por las percepciones del prestamista tanto del riesgo por país como del riesgo idiosincrático, la superficie de respuestas óptimas del prestamista exhibe una forma que dista de ser simple. Para algunos valores de los parámetros, de hecho, la superficie está dada por una "cúspide", una de las catástrofes elementales de Thom (1975). Este hallazgo ejemplifica los resultados obtenidos por Smith (1979) en decisiones bayesianas y teoría de catástrofes.

Como un segundo paso, y para explicar variables exógenas tales como la liquidez mundial, se incorpora el modelo estático en un proceso de difusión que determina los diferenciales. Desde Cobb (1978 y 1981), éste es un procedimiento estándar. La densidad estacionaria de los diferenciales encontrada, a la cual convergen las densidades de transición del proceso de difusión, es precisamente la exponencial cuártica, proporcionando así una justificación para emplearla en la sección II.

Finalmente, en la sección IV se indican algunas posibles extensiones del modelo.

Antes de concluir esta introducción, vale la pena señalar la ambivalencia prevaleciente entre los economistas en relación con la teoría de catástrofes (TC). Como Balasko y otros han mostrado (ver Balasko, 1978, y sus referencias), la TC puede ser una útil herramienta en el análisis teórico del equilibrio. Sin embargo, los intentos de usarla para modelar la conducta económica han sido recibidos críticamente por la mayoría de los economistas, puesto que la mayor parte de dichas aplicaciones (si no todas) no se han basado en una conducta optimizadora. Como Fisher y Jammerneg (1986, p. 16) reconocen en un interesante trabajo en que se usa la TC: "El problema con el presente estado del arte de la aplicación de TC en economía es que no hay una derivación analítica de la forma específica del modelo". Pero, no hay *a priori* ninguna razón para que esto sea así. Este trabajo ilustra que catástrofes elementales pueden surgir naturalmente en modelos de optimización simples.

II. Un estudio empírico de los datos desagregados

Desde fines de los sesenta el mercado de euromoneda ha sido la principal fuente de crédito foráneo para la mayor parte de países en desarrollo. Los

costos del interés constituyen el componente más importante del precio del crédito de largo plazo en este mercado. Es común que se agregue una sobretasa (margen, diferencial) a alguna tasa flotante de interés de referencia, como la interbancaria de Londres (*Libor*). Las sobretasas varían tanto entre países como entre los prestatarios de un país dado. Como una medida del riesgo del crédito, y de conformidad con el modelo de la sección III, la *sobretasa ajustada* se definirá como el resultado de sustraer de cada margen la sobretasa promedio cargada por el mercado (en el mismo trimestre) a los prestatarios de países industrializados.¹

1. Los datos

Las muestras que se estudiarán en este trabajo se enlistan en la figura 1. Cada una está formada de las sobretasas ajustadas cargadas a entidades públicas y privadas de un país en un periodo determinado. Las muestras se tomaron de un estudio comprensivo de los términos del crédito aplicados a doce de los países en desarrollo más endeudados en el periodo 1972-1982 (ver Urzúa, 1986). En contraste con otros casos incluidos en ese estudio, todas las muestras de la figura 1 comparten una importante característica: para cada país, y en un periodo dado, el promedio (ponderado por el tamaño del préstamo) de las sobretasas cargadas cada trimestre a los prestatarios de ese país es estable durante todo el periodo. Así, a) puede suponerse que las condiciones económicas y políticas, tal como las percibe el prestamista, son también estables, y b) puede considerarse que las muestras están formadas totalmente de observaciones de corte transversal.

Nótese que puesto que las tasas cargadas en el mercado de euromonedas son, como regla, múltiplos de un octavo de 1% (esto es, 12.5 puntos base), los datos están agrupados similarmente para producir los histogramas de barras sombreadas en la figura 1. (Las barras sólidas, por otra parte, representan frecuencias estimadas por medio de la distribución proporcionada más adelante.)

Es necesario hacer dos comentarios adicionales antes de seguir adelante: primero, el estudio incluye observaciones de España, un país que habitualmente el Banco Mundial clasifica como industrializado, pero al que no se catalogaba como tal en los setenta.² Segundo, ante la carencia de obser-

¹ Puesto que la sobretasa promedio aplicada a entidades de países industrializados cambió mínimamente en la mayor parte del periodo estudiado, los histogramas de las sobretasas sin ajustar son muy similares a los histogramas de las sobretasas ajustadas mostradas más adelante. Note también el lector que no se consideran otros costos, como las tarifas por apertura de cuenta (*commitment fees*) y las comisiones iniciales (*front-end fees*), puesto que fueron raramente publicados en los setenta.

² La abundancia de observaciones en el caso de España, más que su estado de desarrollo, fue la principal razón para incluirla. La primera muestra de España

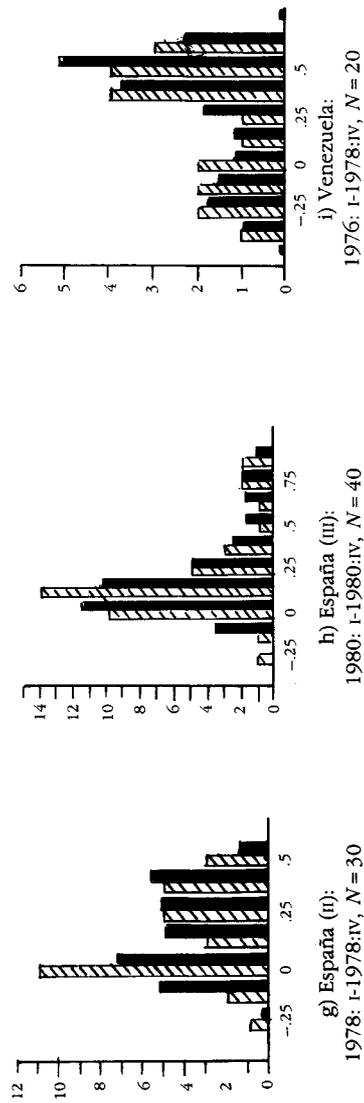
vaciones, sólo se hizo un leve intento por considerar la maduración y el tamaño de los préstamos; la selección fue usualmente restringida a préstamos de al menos 30 millones de dólares y con una maduración mínima de tres años. Sin embargo, nótese que en los más cuidadosos estudios empíricos sobre la materia, por ejemplo, los de Edwards (1984 y 1986), tanto el tamaño como la maduración del préstamo no logran explicar suficientemente la sobretasa. Además, como es bien reconocido en la literatura, no es posible *a priori* determinar de qué forma la magnitud del préstamo (o la maduración) afecta el diferencial. Por un lado, la aversión al riesgo y la diversificación del portafolio sugerirían una relación positiva entre el tamaño del préstamo y el diferencial; y por el otro, el costo unitario de emitir un préstamo tiende a disminuir cuando la magnitud del préstamo crece.

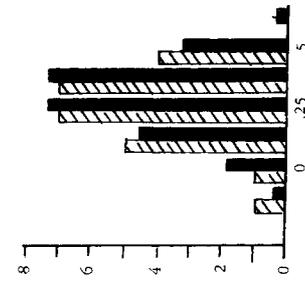
Examinemos ahora la figura 1. Un aspecto notable de ella es que varios histogramas exhiben dos modas. Otra característica interesante resalta al contrastar los histogramas de países para los cuales se dispone de más de una muestra. En el caso de Brasil, por ejemplo, el histograma 1a es unimodal y muy simétrico —como si viniera, por decirlo así, de una población normal—, mientras que el 1b es indudablemente bimodal y sesgado. Aunque la composición de la mezcla de prestatarios públicos y privados brasileños fue prácticamente la misma en aquellos dos periodos, obsérvese que la segunda muestra corresponde a los años en que la economía brasileña estaba deteriorándose. Las muestras de España son igualmente interesantes. En el caso 1g, una muestra tomada un poco después de la muerte de Franco, el histograma es unimodal y la varianza de las sobretasas ajustadas es muy baja. Sin embargo, en los casos 1h y 1i, tomados uno y tres años más tarde, los histogramas son bimodales y las varianzas son más grandes que antes. Sin embargo, nóteses que esto tiene lugar, básicamente, en medio de la misma mezcla de prestatarios, en su mayoría privados.

¿Cómo se podrían explicar esos hallazgos si, como suponemos aquí, los diferenciales ajustados son independientemente obtenidos de distribuciones desconocidas? *A priori* hay lugar para muchas especificaciones estadísticas. Una posible forma de permitir multimodalidad es tener una mezcla de varias poblaciones unimodales; por ejemplo, una mezcla de dos poblaciones normales, $cf(x; \mu_1, \sigma_1^2) + (1 - c)f(x; \mu_2, \sigma_2^2)$, $0 < c < 1$, sería unimodal o bimodal, dependiendo de los valores tomados por sus parámetros. Una opción más económica es tener distribuciones suficientemente flexibles para exhibir diferentes números de modas para diferentes valores de sus parámetros.

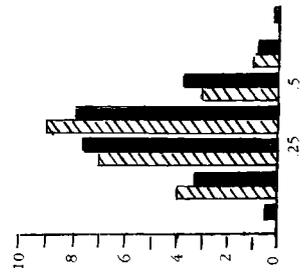
en la figura 1 se tomó un año después de la muerte de Franco, un periodo sobre el cual las sobretasas exhiben, notablemente bien, muy baja variabilidad (como se ilustra repetidamente en Urzúa, 1986, los sucesos políticos influyeron en las estimaciones del riesgo de los prestamistas). Las muestras segunda y tercera de España, por otra parte, fueron arbitrariamente seleccionadas para contrastarlas con la primera.

Figura 1
*Frecuencias observadas y esperadas de las sobretasas ajustadas**

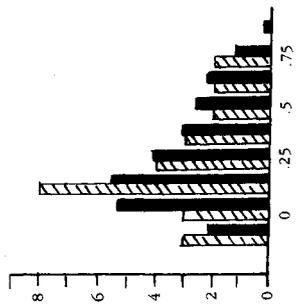




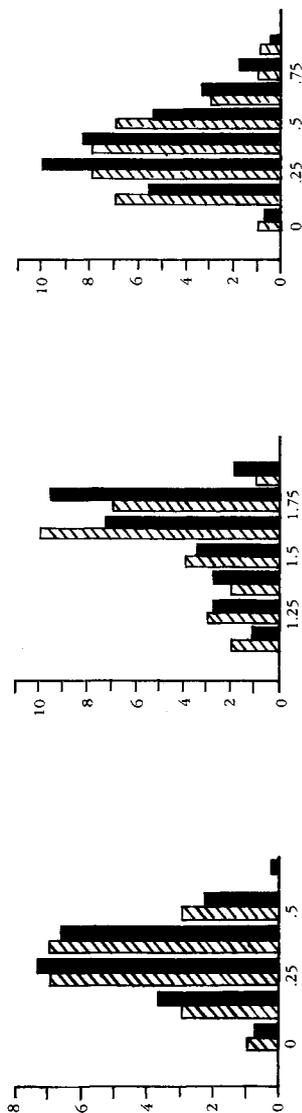
f) España (I):
1976: iv-1977:iii, $N = 25$



e) Filipinas:
1979: i-1981:i, $N = 24$



d) México:
1978: iii-1979:ii, $N = 27$



a) Brasil (I): 1975: I-1975:IV, N = 21
 b) Brasil (II): 1981: II-1982:II, N = 29
 c) Chile: 1979: IV-1981:III, N = 36

* (Las sobretasas ajustadas en el eje horizontal, en porcentajes; N = tamaño muestral; barras sombreadas = frecuencias observadas; barras sólidas = frecuencias esperadas.)

Entre todas las posibles especificaciones, uno debería, desde luego, considerar solamente distribuciones que proporcionen buenos ajustes, y que estén justificadas desde un punto de vista económico. En el resto de esta sección se introduce una clase de distribuciones multimodales y se muestra que una de ellas, en particular, ajusta muy bien todas las muestras de la figura 1. El resto del trabajo proporciona un modelo en el cual se muestra que los diferenciales implicados siguen precisamente esta distribución.

2. La distribución exponencial cuártica

Ronald Fischer (1921) introdujo las funciones de densidad de probabilidad del tipo

$$b(x) = C(\mathbf{a}) \exp(-a_1x - a_2x^2 - \dots - a_kx^k) - \infty < x < \infty \quad (1)$$

donde k es un entero positivo par, a_k es mayor que cero, y $C(\mathbf{a})$ es la constante de normalización dado el vector de parámetros $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$. En particular, la distribución normal se obtiene cuando k es igual a dos.³

Definiendo el polinomio de orden impar $g(x)$ como

$$g(x) = e_1 + e_2x + \dots + e_kx^{k-1}, \quad e_i = ia_i \quad i = 1, \dots, k \quad (2)$$

se sigue que $b'(x) = 0$ si y sólo si $g(x) = 0$. Esto es, las modas (máximos) y antimodas (mínimos) de la densidad $b(x)$ corresponden a las raíces reales del polinomio $g(x)$. Pero hay a lo más $k - 1$, y al menos una, raíces reales de $g(x)$. Este hecho, la continuidad del polinomio y el signo de a_k implican entonces que $b(x)$ tiene, dependiendo de los valores del vector de parámetros \mathbf{a} , a lo más $k/2$ modas (y al menos una). En particular, cuando $k = 4$ en (1), se obtiene la densidad exponencial cuártica, la cual exhibe una o dos modas, dependiendo de los valores de \mathbf{a} . Dado que todos los histogramas en la figura 1 mostraron al menos dos modas, y que de la teoría que se desarrollará más adelante se desprende la exponencial cuártica, esta densidad se usará para ajustar todas las muestras.

Como destaca Cobb (1978 y 1981), se puede obtener una forma más ilustrativa de expresar la exponencial cuártica después de reescribir el correspondiente polinomio cúbico $g(x)$ en su forma reducida:

$$g(x) = e_1 + e_2x + e_3x^2 + e_4x^3 = [(x - r)/s]^3 - v[(x - r)/s] - u; \quad (3)$$

³ Vale la pena notar que las distribuciones de Fisher maximizan la entropía de Shannon entre todas las distribuciones continuas con momentos finitos de órdenes dados (ver Urzúa, 1988). En este sentido, ellas son las "más verosímiles" entre todas las distribuciones con momentos finitos.

donde los nuevos parámetros están dados por:

$$r = -e_3/3e_4, \quad s = (1/e_4)^{1/4}, \quad v = -s^2(e_2 + e_3r), \quad \text{y} \\ u = -s(e_1 + e_2r + e_3r^2 + e_4r^3). \quad (4)$$

Usando esta transformación, ya conocida en el siglo xvi por Gerónimo Cardano, se puede reescribir la exponencial cuártica como

$$b(x) = C \exp(u[(x-r)/s] + v[(x-r)/2s]^2/2 - [(x-r)/s]^{4/4}). \quad (5)$$

Esta reparametrización canónica proporcionará la liga conceptual entre los hallazgos empíricos —que se expondrán más adelante— y la teoría desarrollada en la siguiente sección. Como un punto final, el signo del discriminante de Cardano

$$d = (u/2)^2 - (v/3)^3, \quad (6)$$

determina el número de modas: la densidad es bimodal cuando $d < 0$, y unimodal de otra forma.

3. Estimación

Sea X una variable aleatoria siguiendo una distribución exponencial cuártica y considérese un conjunto de observaciones (x_1, \dots, x_n) de la variable aleatoria. Maximizando la función de verosimilitud se puede obtener un estimado eficiente del vector de parámetros \mathbf{a} . Aunque la tarea computacional de hallar los estimadores de mv usando los métodos tradicionales es, en principio, delicada —por ejemplo el algoritmo de Newton-Raphson requeriría nueve integraciones numéricas en cada etapa—, puede simplificarse significativamente usando un algoritmo debido a Matz (1978). Su método, sorprendentemente, emplea únicamente los primeros cuatro momentos muestrales y requiere tan sólo una integración numérica simple en cada etapa.

Usando como valores iniciales los estimados obtenidos por medio de un método de momentos atribuido a Aroian (1948),⁴ el algoritmo de Matz fue entonces utilizado para encontrar los estimados de mv del vector \mathbf{a} . Puesto que la reparametrización de la exponencial cuártica dada en (5) probará ser más útil en la sección iii, el estimado de \mathbf{a} se usó entonces para computar los estimados de mv de los parámetros canónicos (u, v, r, s) definidos en (4). Los resultados obtenidos aparecen en el cuadro 1.

⁴ Estos estimados, junto con los conjuntos completos de datos examinados en este trabajo, pueden solicitarse al autor.

Cuadro 1
*Estimados de máxima verosimilitud de los parámetros canónicos
 y pruebas de la bondad de ajuste*

País	\hat{u}	\hat{v}	\hat{r}	\hat{s}	\hat{d}	Prueba χ^2 *		Prueba k-s**	
						χ^2	$\chi^2_{10,p}$	\hat{D}	$D_{10,N}$
Brasil (I)	0.51	-2.79	0.26	0.24	0.87	0.75	4.61	0.04	0.26
Brasil (n)	0.54	1.56	1.46	0.19	-0.07	3.19	7.78	0.12	0.22
Chile	-0.92	0.06	0.51	0.25	0.21	2.20	9.24	0.05	0.20
México	-0.49	0.81	0.37	0.27	0.04	3.50	9.24	0.06	0.23
Filipinas	-1.40	-7.88	0.39	0.39	18.63	1.22	4.61	0.03	0.24
España (i)	1.08	-1.53	0.17	0.25	0.42	2.06	6.25	0.02	0.24
España (II)	-0.11	1.32	0.16	0.17	-0.08	8.01	7.78 ^a	0.09	0.22
España (III)	-0.68	1.90	0.44	0.26	-0.14	11.03	12.02	0.08	0.19
Venezuela (III)	0.22	2.16	0.12	0.25	-0.36	1.60	10.64	0.04	0.27

* χ^2 representa el valor del estadístico. $\chi^2_{10,p}$ denota el valor crítico al nivel de 10% de significancia con p grados de libertad; donde p iguala el número de clases (esto es, el número de barras sombreadas en el correspondiente histograma), menos el número de parámetros estimados (cuatro aquí) menos uno.

** \hat{D} denota el valor de los estadísticos. $D_{10,N}$ representa los valores críticos al nivel de 10% de significancia del estadístico de Kolmogorov-Smirnov para una muestra de tamaño N , como está dado en Miller (1956).

^a El valor crítico al nivel de significancia de 5% es 9.49.

El cuadro 1 también muestra dos pruebas sobre la bondad de ajuste; éstas son la prueba chi-cuadrada, la cual es más sensible a irregularidades en la distribución, y la prueba de Kolmogorov-Smirnov (k-s), que lo es más ante desviaciones respecto a la forma completa de la distribución.⁵ Como se puede apreciar en el cuadro, las pruebas k-s nunca rechazan la bondad de los ajustes al nivel de significancia de 10%. Lo mismo se mantiene para la prueba chi-cuadrada, excepto para una de las muestras de España (para la que el valor del estadístico cae entre los niveles de significancia de 5 y 10 por ciento). Otra confortante característica de los ajustes es que el estimado del discriminante de Cardano, d —dado antes en (6)—, tiene el signo correcto; esto es, el número de modas de cada ajuste siempre corresponde al número de modas observado. La bondad de los ajustes también puede aquilatarse en la figura 1, que muestra las frecuencias observada y esperada. Aun en las figuras 1(b), donde hay un mal ajuste entre las modas mayores obser-

⁵ Puesto que esas pruebas son bien conocidas, su descripción es breve: después de agrupar los datos en j clases, la prueba del estadístico chi está dada por $\sum (O_i - E_i)^2 / (E_i)$, donde O_i y E_i son las frecuencias observada y esperada de la clase i -ésima. El estadístico $K - S$, en otra veta, está dado por el máximo entre los valores absolutos de las diferencias $(S_i - F_i)$, $i = 1, \dots, j$, donde S_i y F_i son las frecuencias acumuladas observada y esperada de la i -ésima clase.

vada y esperada, y $l(g)$, ya identificado por la prueba chi-cuadrada, la frecuencia esperada reproduce muy bien las otras partes de las distribuciones.

Vale la pena mencionar, como punto final, que con objeto de probar normalidad cuando la alternativa es la exponencial cuártica, sólo se necesita probar la hipótesis nula $H_0: a_3 = a_4 = 0$. Esta interesante posibilidad se explorará ahora. Aunque pueden usarse varias pruebas posibles para ese fin, aquí se usará la del multiplicador de Lagrange (ML), puesto que sólo requiere cálculos bajo la hipótesis nula. El estadístico ML está definido como $ML = \bar{D}' \bar{I}^{-1} \bar{D} / N$, donde \bar{D} es el vector promedio e \bar{I} es la matriz de información, ambas evaluadas usando el estimador restringido de máxima verosimilitud. Como se muestra en Urzúa (1986, 1989), el estadístico de prueba ML para este caso es precisamente el mismo que el ampliamente usado estadístico Jarque-Bera para normalidad (Jarque y Bera, 1987). A saber,

$$ML = N [(\sqrt{b_1})^2/6 + (b_2 - 3)^2/24] \quad (7)$$

donde N denota el tamaño muestral, y donde los momentos estandarizados tercero y cuarto están dados por $\sqrt{b_1} = m_3 / (m_2)^{3/2}$ y $b_2 = m_4 / (m_2)^2$, con m_n siendo el n -ésimo momento central de la muestra.

Usando (7), la normalidad es fácilmente rechazada al nivel de significancia de 10% en los casos (b) y (h) de la figura 1; en tanto que para los casos (c), (g) e (i) la normalidad es rechazada a un nivel de significancia de alrededor de 15%.⁶ En casos tales como (a) y (e), sin embargo, la normalidad apenas puede ser rechazada. Por ello es alentador que, como será explícitamente observado más adelante, el modelo que se desarrollará en la siguiente sección pueda modificarse para generar la distribución normal como un caso alternativo a la exponencial cuártica.

III. Un modelo de concesión de préstamos foráneos

Las pruebas incluidas en el cuadro 1 solamente implican, desde luego, que no es posible rechazar, para algún nivel de significancia, la hipótesis de que las muestras realmente provienen de poblaciones exponencial cuárticas. Esta sección presenta un modelo que proporciona una posible razón para que esto sea así.

⁶ El estadístico de prueba en (7) está asintóticamente distribuido bajo la hipótesis nula como una chi cuadrada con dos grados de libertad. Los valores críticos para muestras pequeñas están dados en Jarque y Bera (1987). Los valores de los estadísticos para los casos (a) hasta (i) son, respectivamente, 0.06, 3.19, 2.05, 1.58, 0.16, 0.43, 1.91, 9.48 y 1.92.

1. *El marco básico*

Considérese el caso de un prestamista que evalúa el riesgo de extender un préstamo a una entidad de un país dado. Es conveniente asumir en este momento que los factores que afectan el mercado de euromoneda como un todo (por ejemplo, la liquidez del mercado) son constantes. Este supuesto será relajado más adelante.

Denotemos con x al diferencial ajustado que se carga sobre el préstamo. Al igual que en la sección II, tanto la magnitud como la maduración del préstamo se asumen como exógenamente dados (aunque pudieran influir en el diferencial ajustado por medio de los parámetros definidos más adelante). Supóngase que los costos contables del prestamista, dados por la tasa requerida de retorno sobre el capital y los costos administrativos, son iguales al diferencial promedio aplicado por el mercado a las entidades de países industrializados. Puesto que esas entidades (por ejemplo el reino de Suecia) pueden considerarse sin duda como no riesgosas, el diferencial ajustado puede suponerse un puro reflejo del riesgo por país.

De la tasa aleatoria de rendimiento del proyecto que se financiará con el préstamo, sustraemos tanto la tasa de retorno requerida del país así como todos los otros costos del servicio del préstamo, aparte de la sobretasa ajustada. Esta tasa "neta" de rendimiento aleatoria se denota como y . Sean para el prestamista $F_u(y)$ la distribución que el prestamista asigna, *a priori*, a y , y sea $L_v(x, y)$ su función de pérdida cuando el diferencial cargado es x y la tasa neta de retorno es y . F y L están parametrizadas respectivamente por u y v (escalares o vectores). Estos parámetros podrían cambiar cuando la situación política y/o económica del país, según lo perciba el prestamista, varíe. Por ejemplo, u y v podrían ser funciones de la actual proporción de la inversión en el PNB del país y/o funciones de algún índice numérico de inestabilidad política (u y v también podrían depender de la magnitud y la maduración del préstamo).

Un supuesto crucial se plantea ahora: supóngase que la función de pérdida del prestamista es un promedio de las pérdidas derivadas de dos estados de incertidumbre (las implicaciones de tener más de dos estados se explorará líneas adelante). Más precisamente, supóngase que el prestamista espera en el estado i ($= 1, 2$) una tasa de rendimiento efectiva dada por $x - \mu_i$, donde μ_i representa una pérdida, o ganancia, *ex post* sobre cada dólar prestado. Aunque las μ 's podrán tomar cualquier valor, para facilitar las interpretaciones que siguen, se puede fijar $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 = 0$, de tal forma que μ_1 puede considerarse como los costos de cobro o de restructuración de la deuda, en el estado de alto riesgo. Denotando con c su probabilidad subjetiva de ocurrencia del estado 1, la función de pérdida del prestamista se puede ahora postular como

$$L_v(x, y) = cL(x - \mu_1 - y) + (1 - c)L(x - \mu_2 - y), \quad (8)$$

donde $L(z)$ es una función de pérdida que se detallará más adelante.

La especificación en (8) trata de tomar en cuenta la heterogeneidad de los prestatarios del país (representando aquí un alto o un bajo riesgo, con c dando la estimación *a priori* de la proporción de prestatarios de alto riesgo por parte del prestamista). Sin embargo, (8) también puede emplearse para modelar escenarios como los siguientes: debido a trastornos políticos experimentados por un país deudor durante el periodo, el prestamista considera la posibilidad de que el gobierno prestatario pudiera ser arrojado del poder con probabilidad c antes de que el préstamo sea rembolsado.

El siguiente supuesto es que el diferencial ajustado es solamente fijado por el prestamista. Debe notarse, sin embargo, que las condiciones de préstamo prevalecientes en el mercado de euromoneda cambiaron ampliamente durante el periodo en estudio. Un mercado de prestamistas estaba más cerca de la realidad durante los setenta que al principio de los ochenta; y se aplicaba más probablemente para prestatarios privados que para públicos. El relajamiento de este supuesto, no obstante, se hará en la subsección 4, donde las variaciones en las condiciones de préstamo se considerarán como perturbaciones (no sistemáticas) en los diferenciales.

Con objeto de tener un problema de decisión bien definido bajo el supuesto de un mercado de prestamistas, la función de pérdida $L(z)$ es ahora tratada como estrictamente creciente en los valores absolutos de z . Esta condición puede interpretarse como sigue: en cada estado i el prestamista incurre en una pérdida, debida a incumplimiento parcial o a una reprogramación del préstamo, cuando la tasa neta de retorno para el prestamista $x - \mu_i$ excede la tasa neta de retorno para el país y . Por otro lado, hay costos de oportunidad, beneficios renunciados, cuando $x - \mu_i < y$.

Dados los supuestos anteriores, el problema de decisión del prestamista se reduce a elegir el diferencial x que minimiza la pérdida esperada:

$$\text{Min } R(x) = \int_{y \in Y} L_v(x, y) dF_u(y). \quad (9)$$

Ahora se requieren formas funcionales específicas. La más obvia candidata para ser $L(z)$ es la función de pérdida cuadrática: $L(z) = kz^2$, $k > 0$. La estructura de esta función, sin embargo, es demasiado simple para servir a los propósitos de este documento. Hay, de cualquier manera, un buen motivo para no elegirla; la función de pérdida cuadrática no es estable en el sentido de Kadane y Chuang (1976), puesto que, como muestran estos autores, pequeños errores en su especificación podrían llevar a decisiones significativamente más malas. En vez de ello, la función de pérdida que aquí se usará se tomó de la clase (acotada y estable) de funciones de pérdida de Lindley (1976), y está dada por:

$$L(z) = 1 - \exp(-z^2/2b), \quad (10)$$

donde $b > 0$. Nótese que, como es requerido, es estrictamente creciente en el valor absoluto de z (de hecho tiene la forma de una campana invertida).

Una distribución particular $F_u(y)$ es también necesaria. Se supondrá que F es la distribución normal con varianza σ^2 y (sin pérdida de generalidad) media cero.

Definiendo ahora

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x-y) dF_u(y),$$

donde L es la misma función que en (10), se sigue que⁷

$$E(x) = 1 - [b/(b + \sigma^2)]^{1/2} \exp(-x^2/2[b + \sigma^2]). \quad (11)$$

Consecuentemente, para estas formas funcionales particulares, el problema de decisión del prestamista (9) puede reescribirse como

$$\text{Min } R(x) = cE(x - \mu_1) + (1 - c)E(x - \mu_2), \quad (12)$$

donde $0 < c < 1$, $\mu_1 > \mu_2$ y $E(x)$ está dada en (11). Si hay un estado de riesgo simple, entonces $\mu_1 = \mu_2$, y el problema de minimización (12) se resuelve trivialmente en $x = \mu_1$. Sin embargo, una vez hecha la distinción entre los estados de alto y bajo riesgo, la superficie de respuestas óptimas se vuelve bastante más compleja. La subsección siguiente prepara al lector para analizar este caso general.

2. Breves comentarios sobre la teoría de catástrofes

Considérese el sistema dinámico

$$dx/dt = -dP_{u,v}(x)/dx, \quad (13)$$

donde $P_{u,v}(x)$, llamado el potencial, depende de la variable de estado x , y es parametrizado por las variables de control u y v . La teoría de catástrofes, originada con Thom (1975), proporciona una clasificación geométrica de funciones como $P_{u,v}(x)$ en términos de sus parámetros.⁸

⁷ Esto se sigue después de notar que el producto de la función de pérdida de Lindley y la densidad normal con media cero, $L(x-y)f(y; 0, \sigma^2)$, puede ser reexpresado como $f(y; 0, \sigma^2) - [\tau/\sigma] \exp(-x^2/2[b + \sigma^2])f(y; \mu, \tau^2)$, con $\mu = x\sigma^2/(b + \sigma^2)$ y $\tau^2 = b\sigma^2/(b + \sigma^2)$.

⁸ En lo que sigue, el potencial P , considerado como una función de x , u y v , es supuesto suave y "genérico" (ver Zeeman, 1977). Una vez hecho el supuesto de suavidad, la "genericidad" es un requerimiento inocuo, puesto que cualquier función suave puede ser arbitrariamente aproximada por una función suave y genérica.

Representamos con M la superficie de valores estacionarios para los cuales, en (13), $dx/dt = 0$:

$$M = \{(x, u, v) \in X \times U \times V \text{ tal que } dP_{u,v}(x)/dx = 0\}.$$

Nótese en particular que si hay un mínimo o máximo (local) del potencial $P_{u,v}$ en x , entonces (x, u, v) está en M . Nótese también que, por el signo negativo en (13), un punto mínimo es estable mientras que uno máximo no lo es.

A priori, M podría estar doblada sobre sí misma, así que podría haber más de un valor de x en M para valores dados de los parámetros u y v . Denotamos con B al conjunto bifurcación contenido en $U \times V$ tal que

$$dP_{u,v}(x)/dx = d^2P_{u,v}(x)/dx^2 = 0;$$

donde la última igualdad es necesaria para que M se doble sobre sí misma. Por el teorema de clasificación de Thom, este conjunto bifurcación puede ser localmente considerado como uno de los siguientes tres casos: *i*) el conjunto vacío, *ii*) una curva suave sencilla, o *iii*) una curva suave sencilla excepto por un punto “cúspide” en ella. El primer caso se deriva cuando la superficie tiene una forma simple de hoja de papel, como la página que ve el lector. El segundo caso resulta cuando la superficie está doblada sobre ella misma en una forma “natural”; esto es, la superficie puede ser localmente descrita por la ecuación $x^2 = v$, de tal manera que para un valor dado de u la resultante curva de nivel es una parábola. Finalmente, la forma geométrica a la cual corresponde el tercer caso se aprecia en la figura 2.

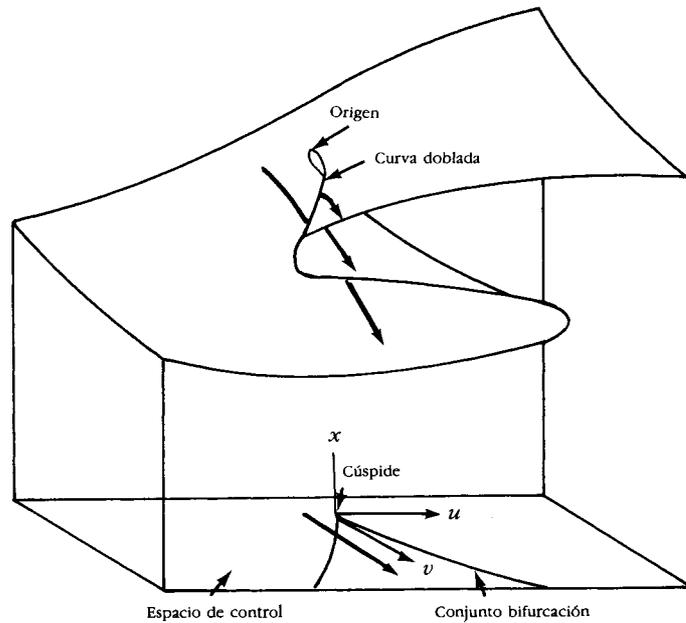
Este último caso, llamado la *catástrofe canónica de la cúspide*, representa la forma geométrica más compleja entre los tres tipos considerados en la clasificación de Thom. El potencial correspondiente a la catástrofe de la cúspide es $P_{u,v}(x) = x^4/4 - vx^2/2 - ux$, de manera que la superficie de equilibrio M está descrita por el polinomio cúbico

$$x^3 - vx - u = 0, \tag{14}$$

donde x , u y v pueden tomar cualquier valor real. En este caso el conjunto bifurcación está dado por los puntos (u, v) sobre el plano, tales que $27u^2 = 4v^3$; esto puede verse diferenciando $x^3 - vx - u = 0$ con respecto a x para obtener $3x^2 - v = 0$, y resolviendo para u y v . Nótese también que en el punto cúspide, $(x, u, v) = (0, 0, 0)$, y la tercera derivada de $P_{u,v}(x)$ se anula igualmente.

Como se muestra en la figura 2, M está formada de tres hojas cuando $(u, v) \in B$. El potencial es minimizado sobre las hojas inferior y superior, mientras que se maximiza en la intermedia. Consecuentemente, la hoja de

Figura 2
Superficie cúbica de equilibrio de la catástrofe cúspide



Se muestra una trayectoria paralela al eje v atravesando el espacio de control. Como la trayectoria cruza el conjunto bifurcación, el número de equilibrios dado por la superficie aumenta de uno a tres.

en medio repele, en tanto que lo que resta de M , atrae. También debe notarse que puesto que el proceso es guiado por una ecuación diferencial, siempre llevará a minimizar localmente el potencial (y así la hoja superior es tan relevante como la inferior). Se dice que este comportamiento sigue la *regla de retardo*, opuesta a la *regla de Maxwell*, la cual sólo permite elegir mínimos globales. En relación con las variables de control u y v , en la literatura éstas son llamadas los factores *normal* y *partidor*, respectivamente, ya que, como se aprecia en la figura, si $v < 0$, entonces cualquier cambio suave en u llevaría a un cambio suave en x , mientras que si $v > 0$ entonces cambios en u eventualmente traerían cambios discontinuos en x .

Para los propósitos de este documento, es importante notar, como un punto final, que la ecuación cúbica en (14) es, excepto por un cambio de coordenadas, análoga a la postulada en la ecuación (3) de la última sección.

Puesto que tal polinomio da origen a la expresión de la exponencial cuártica mostrada en (5) y, como puntualizamos antes, los ceros del polinomio son las modas y las antimodas de la densidad, se sigue que siempre que la superficie cúbica se doble sobre sí misma, la exponencial cuártica implicada por (14) es bimodal, y solamente entonces.

3. La superficie de respuestas óptimas

Ahora afirmamos que la pérdida esperada por el prestamista $R(x)$, dada en (12), es un potencial que exhibe catástrofes cúspide. La forma más simple de mostrar este resultado es aplicar el teorema 1 de Smith (1979);⁹ pero, con objeto de hacer este documento autocontenido, aquí se ofrece una prueba de ello. Con el propósito de evitar largas expresiones algebraicas, se supondrá ahora que la suma $b + \sigma^2$ es igual a uno en (11); así que el problema del prestamista puede ser simplificado como

$$\begin{aligned} \text{Min } R(x) &= cE(x - \mu_1) + (1 - c)E(x - \mu_2), \text{ con} & (15) \\ 0 < c < 1, \mu_1 > \mu_2, \text{ y } E(x) &= 1 - b^{1/2}\exp(-x/2). \end{aligned}$$

Los resultados para el caso más general se presentan en el apéndice; tales resultados pueden ser fácil, aunque tediosamente, derivados al reproducir los pasos que se siguen más adelante.

La afirmación se establece ahora explícitamente: $R(x)$, definido en (15), exhibe puntos cúspide a lo largo (y sólo a lo largo) de las coordenadas,

$$(x, c, w) = (\bar{x}, 1/2, 1), \quad (16)$$

donde $\bar{x} = (\mu_1 + \mu_2)/2$ y $w = (\mu_1 - \mu_2)/2$.

Para probar este resultado recordamos primero que un punto sobre la superficie $R'(x) = 0$ es una cúspide si y sólo si $R^{(2)}(x) = R^{(3)}(x) = 0$. Así, cualquier punto cúspide tiene que cumplir

$$R^{(i)}(x) = cE^{(i)}(x - \mu_1) + (1 - c)E^{(i)}(x - \mu_2) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (17)$$

donde, de (15), las primeras tres derivadas de $E(x)$ están dadas por

$$E'(x) = b^{1/2}x \exp(-x^2/2),$$

⁹ Ver también Smith, Harrison y Zeeman (1981). Debería notarse que ni el supuesto de normalidad de y ni el empleo de la función de pérdida de Lindley son necesarias para generar catástrofes. Se podría dar un marco más general por medio de la teoría de "mezcla de catástrofes" de Smith (ver Urzúa, 1986).

$$E^{(2)}(x) = -E'(x)(x^2 - 1)/x, \quad (18)$$

$$E^{(3)}(x) = E'(x)(x^2 - 3).$$

Ahora, después de hacer $i = 1$ e $i = 3$ en la ecuación (17) se obtiene inmediatamente

$$E^{(3)}(x - \mu_1)/E'(x - \mu_1) = E^{(3)}(x - \mu_2)/E'(x - \mu_2).$$

Esta igualdad y (18) implican que $(x - \mu_1)^2 = (x - \mu_2)^2$, lo cual a su vez lleva a $x = \bar{x}$. Similarmente, (17) también implica que

$$E^{(2)}(x - \mu_1)/E'(x - \mu_1) = E^{(2)}(x - \mu_2)/E'(x - \mu_2).$$

Consecuentemente, usando nuevamente (18),

$$(x - \mu_2)[1 - (x - \mu_1)^2] = (x - \mu_1)[1 - (x - \mu_2)^2].$$

Esta ecuación y $x = \bar{x}$ llevan a $w = 1$. Finalmente, la ecuación (17), con $i = 1$, y $x = \bar{x}$ directamente implican que $c/(1 - c) = -E'(w)/E'(-w)$, lo cual, por (18), es igual a uno. Así $c = 1/2$, y la prueba de la afirmación se completa.

Con una consecuencia, la superficie de diferenciales óptimos ajustados cerca de cualquier catástrofe cúspide es geoméricamente análoga a la figura 2. Más precisamente, como se muestra en el apéndice, la superficie de decisiones óptimas cercana a la cúspide está localmente dada por $R'(x) = -m(x) = 0$, donde $m(x)$ está definida como

$$m(x) = -(x - \bar{r})^3 + \bar{v}(x - \bar{r}) + \bar{u}, \quad (19)$$

con $\bar{r} = [(\mu_1 + \mu_2)/2] - 2c + 1$, $\bar{u} = 6c - 3$ y $\bar{v} = 3(\mu_1 - \mu_2) - 6$. Es interesante notar que el factor normal depende solamente del grado de heterogeneidad, dado por c , en tanto que el factor partidor es solamente función de $\mu_1 - \mu_2$.

Antes de concluir esta subsección es necesario anotar que la discusión anterior asume implícitamente que el prestatario sigue la regla de retardo. Aunque parece natural que modelos estáticos tales como (15) requieran la regla de Maxwell, la regla de retardo está justificada en la extensión dinámica que se desarrolla a continuación.

4. Incorporación del modelo en un marco dinámico

Es tiempo ahora de reconocer, de una forma estilizada, que seguramente cambios en variables, tales como las tasas de interés mundiales y la liquidez

del mercado, provocaron modificaciones en los términos de los préstamos de un periodo al siguiente, aun si las condiciones económicas y políticas de los países permanecieron inalteradas. El enfoque seguido aquí es considerar que todas estas variables exógenas influyeron de modo no sistemático al diferencial.

Más precisamente, supóngase que el diferencial ajustado satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dX = m(X)dt + \sqrt{q} dB(t), \quad (20)$$

donde $m(x)$, la media infinitesimal del proceso, está dada por (19) —así que es supuesto que el vector (x, c, w) está cerca de la cúspide—; q , la varianza infinitesimal, es una constante positiva, y $B(t)$ es el proceso de movimiento browniano estándar (ver, por ejemplo, Karlin y Taylor, 1981).

La ecuación (20) puede considerarse formada de dos componentes. El primero es la ecuación diferencial determinística

$$dx/dt = m(x) = -dR/dx, \quad (21)$$

la cual es simplemente la versión dinámica del modelo estático presentado previamente. Los comentarios hechos en la subsección 2 son relevantes aquí; a saber, la regla de retardo se aplica en este caso, y los puntos mínimos implicados por (21) son siempre estables. El segundo componente es el movimiento estándar browniano. Para los propósitos de la exposición se puede considerar que “ dB/dt ” — $B(t)$ no es diferenciable en ninguna parte— es un proceso gaussiano estacionario de tiempo continuo, de tal suerte que (20) podría concebirse como análoga al resultado de añadir al miembro derecho de (21) una colección de variables aleatorias normalmente distribuidas indizadas por t . Estas perturbaciones representan los otros factores relevantes (e inexplicados) que determinan los diferenciales.

Una vez que aquellos componentes se sumaron para obtener el modelo no optimizante de (20), emerge un nuevo supuesto implícito. Puesto que los prestamistas no toman en cuenta (20), se sigue que no están conscientes de la posibilidad de futuras perturbaciones; esto es, los prestamistas son miopes. Para una defensa de esta posición, véase el influyente trabajo de Guttentag y Herring (1985, a, b), donde se afirma que la “miopía hacia el desastre” de los prestamistas fue un factor importante detrás de la presente crisis de la deuda. Ver también a Urzúa (1986, pp. 17-48) donde se ofrecen varios ejemplos para apoyar esta afirmación.

La solución para (20), $X(t)$, es, desde luego, un proceso estocástico en sí misma. Si el proceso comienza en x_0 , entonces, en un tiempo dado t , la distribución de transición $X(t)$ está dada por $P(x, t, x_0) = \text{Pr}[X(t) \leq x \mid X(0) = x_0]$; donde $P(x, 0, x_0)$ es igual a uno si $x \geq x_0$, e igual a cero de otra manera. De modo correspondiente, la densidad de transición de $X(t)$, si existe, está dada por

$$p(x, t, x_0) = dP(x, t, x_0)/dx.$$

El proceso estocástico está completamente identificado por $p(x, t, x_0)$. Desafortunadamente, las densidades de transición no pueden encontrarse de manera explícita, excepto para casos muy especiales (por ejemplo, una media infinitesimal lineal). Sin embargo, puede darse una solución explícita para la densidad estacionaria del proceso, a la que la densidad de transición converge al paso del tiempo: $b(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t, x_0)$; y la cual, en casos de un buen comportamiento tal como éste, no depende de x_0 . Específicamente, en el apéndice se muestra que la densidad estacionaria del proceso gobernado por la ecuación (20) está dado por

$$b(x) = C \exp\left(\int^x [2m(y)/q] dy\right). \quad (22)$$

Más precisamente, puesto que la media infinitesimal $m(x)$ está dada por el polinomio cúbico de (19), la densidad estacionaria es la exponencial cuártica

$$b(x) = C \exp(u[(x-r)/s] + v[(x-r)/s]^2/2 - [(x-r)/s]^4), \quad (23)$$

con $s = (q/2)^{1/4}$.

$$r = (\mu_1 - \mu_2)/2 - 2c + 1, \quad u = (2/q)^{3/4}(6c - 3),$$

$$\text{y} \quad v = (2/q)^{1/2}[3(\mu_1 - \mu_2) - 6].$$

El vector de parámetros (r, s, u, v) de esta densidad depende de los parámetros de comportamiento c, q, μ_1 y μ_2 . Al reevaluar el prestamista la verosimilitud de cada estado de incertidumbre, o cuando las condiciones del mercado cambian, o cuando las condiciones económicas y políticas del país varían, los parámetros de las densidades de transición cambian a su vez. Esto entonces lleva a cambios en los parámetros de la exponencial cuártica dada en (23), a la cual las densidades de transición convergen. En particular, dos diferentes vectores de parámetros de comportamiento podrían llevar a drásticas diferencias en la forma (y el número de modas) de las exponenciales cuárticas correspondientes. Así pues, el modelo proporciona una explicación de las paradojas de la figura 1. El círculo se ha completado.

Dos comentarios finales antes de concluir esta sección. En primer término, los parámetros de comportamiento se pueden expresar en términos de los parámetros de la exponencial cuártica como:¹⁰

¹⁰ Obsérvese que en el caso general, cuando $b + \sigma^2$ no necesariamente es igual a uno, el número de parámetros de comportamiento excede en uno al número de

$$c = (1 + us^3/3)/2, \mu_1 = 1 + r + s^2(us + v/2)/3, \\ \mu_2 = -1 + r + s^2(us - v/2)/3, \text{ y } q = 2s^4.$$

Usando los estimados del cuadro 1 y estas expresiones, se podrían identificar los parámetros de comportamiento para cada una de las muestras. En particular, puesto que en el cuadro todos los valores estimados de s son pequeños, los correspondientes a c y a $\mu_1 - \mu_2$ se aproximarían a $1/2$ y 2 , respectivamente, para todas las muestras. Éstas son precisamente las condiciones derivadas con anterioridad para que se esté cerca de un punto cúspide. En segundo lugar, si, en vez de asumir que $m(x)$ está dada por (19), se supone que $m(x)$ es lineal (esto es, que la catástrofe no fuese esperada), entonces, como puede ser fácilmente comprobado, la distribución estacionaria del correspondiente proceso de difusión engendraría la distribución normal en lugar de la exponencial cuártica.

IV. Comentarios finales y ampliaciones adicionales

En este trabajo se han examinado las distribuciones de los diferenciales aplicados por el mercado de euromoneda a entidades de varios países. Aunque se encontraron en ellas una variedad de formas, se mostró que una distribución simple, la exponencial cuártica de Fischer, ajusta muy bien todas las muestras. Este documento también ofreció un modelo de préstamos foráneos donde la distribución estacionaria de los diferenciales implicada es precisamente la exponencial cuártica. Vale la pena notar, como punto final, que los resultados de este trabajo pueden aun ser extendidos en varios frentes. A continuación se revisarán brevemente tres de estas posibles extensiones.

1. El caso de tres estados de riesgo

Los histogramas de la figura 1 tienen al menos dos modas; por ello se eligió la exponencial cuártica entre las densidades dadas en (1). Es interesante notar, no obstante, que si alguno de los histogramas ha mostrado tres modas el análisis estadístico pudo extenderse reemplazando, de haber sido necesario, la cuártica por la exponencial *séxtica* —obtenida al hacer $k = 6$ en (1)—, una densidad que exhibe de una a tres modas. Además, el modelo teórico también puede ser extendido como sigue: primero, modifíquese (12) para considerar tres, en lugar de dos estados de riesgo. Esto es,

parámetros de la distribución. En este caso se requiere una restricción previa sobre alguno de los parámetros para identificar completamente el modelo.

$$R(x) = c_1 E(x - \mu_1) + c_2 E(x - \mu_2) + c_3 E(x - \mu_3),$$

donde $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ y $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$. Segundo, siguiendo a Smith (1979), afirmese que la minimización de esta nueva pérdida esperada genera, para algunos valores de los parámetros, lo que Thom (1975) llama *la catástrofe de la mariposa*. Esto es, muéstrase que la superficie de respuestas óptimas está dada por $R'(x) = -m(x) = 0$, con $m(x) = -(x - b)^5 + d_1(x - b)^3 + d_2(x - b)^2 + d_3(x - b) + d_4$. Y finalmente, usando (22), obsérvese que la solución estacionaria de (20) bajo la nueva especificación es la exponencial séxtica.¹¹

2. El caso de diferenciales acotados

Se supone en (20) que la variable de estado puede tomar cualquier valor sobre la recta real y que la varianza infinitesimal es constante. Tales supuestos, sin embargo, no son necesarios. Los valores de la variable de estado pudieran estar restringidos a otros intervalos abiertos sobre la recta real, como por ejemplo en las siguientes dos alternativas: $x > a$, y $a < x < b$, donde a y b son números reales. Las varianzas infinitesimales a postular en esos casos pudieran ser, respectivamente, $q(x) = \bar{q}[x - a][b - x]$, con $\bar{q} > 0$, por lo que la varianza sería cero siempre que la variable de estado tocara cualquiera de sus barreras no absorbedoras. Las soluciones estacionarias de (20) bajo estas dos nuevas especificaciones, puede mostrarse, son también densidades multimodales.¹²

3. El fenómeno de "contagio" de los ochenta

Ha sido asumido implícitamente que los diferenciales ajustados que se cargan a un país son independientes de los que se cargan a otros. Éste es un supuesto plausible mientras las muestras sólo incluyan datos previos a la

¹¹ Vale la pena mencionar que si se quiere introducir cuatro o más "tipos de prestatarios" en (12), el número de parámetros sería demasiado grande para tener una clasificación finita de catástrofes. Así, en el caso de hallar histogramas con cuatro o más modas, (12) no podría modificarse como antes. Aunque, desde luego, (20) y el análisis estadístico de la sección II aún podrían modificarse eligiendo un polinomio apropiado $m(x)$.

¹² Cobb *et al.* (1983) estudian tales distribuciones estacionarias. Hay, sin embargo, dos cualificaciones a considerar antes de hacer cualquier modificación del modelo a lo largo de esta línea: primero, la restricción sobre los valores de x tiene que ser no activa en el problema de optimización dado en (12). Y, segundo, se tendría que comprobar si las nuevas distribuciones ajustan los datos tan satisfactoriamente como la cuártica exponencial.

crisis de la deuda de 1982, puesto que todos los diferenciales aplicados por el mercado de euromoneda subieron temporalmente, sin consideración alguna de las condiciones económicas de cada país, después del comienzo de la crisis. Aunque el marco optimizador ofrecido en (12) difícilmente pudiera ser extendido para tomar en cuenta la concesión involuntaria de créditos prevaleciente en el mercado desde agosto de 1982, es interesante notar que hay una forma directa de generalizar (20) con objeto de obtener distribuciones estacionarias multimodales p -variadas: $d\mathbf{X} = m(\mathbf{X})dt + \sqrt{\mathbf{V}}d\mathbf{B}(t)$, donde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ es el vector de los diferenciales ajustados obtenidos por los p países de interés, $m(\mathbf{X}) = (m_1(\mathbf{X}), \dots, m_p(\mathbf{X}))$ es el vector de medias infinitesimales, \mathbf{V} es una matriz diagonal de orden $p \times p$ con elementos estrictamente positivos v_{ii} —las covarianzas infinitesimales se suponen iguales a cero—, y $\mathbf{B}(t)$ es el vector del proceso de movimiento browniano estándar. Cuando la media infinitesimal es un vector de (bien comportados) polinomios en los p componentes, se puede mostrar que la solución estacionaria del proceso está en la clase de distribuciones multivariadas estudiadas en Urzúa (1988).

Apéndice

A. Derivación de la ecuación (19)

El objetivo es hallar una expresión local para $R'(x) = 0$ alrededor de cualquier punto cúspide de la forma $(x, c, w) = (\bar{x}, 1/2, 1)$. Para tal fin considérese la expansión de Taylor de tercer orden para $R'(x)$ alrededor de \bar{x} :

$$\sum_{i=0}^3 R^{(i+1)}(\bar{x})(x - \bar{x})^i/i! = 0, \tag{A.1}$$

donde $R^{(i)}(\bar{x}) = cE^{(i)}(-w) + (1 - c)E^{(i)}(w)$. Pero nótese que

$$E'(x) = b^{1/2}x \exp(-x^2/2), \quad E^{(2)}(x) = -E'(x)(x^2 - 1)/x, \tag{A.2}$$

$$E^{(3)}(x) = E'(x)(x^2 - 3) \text{ y } E^{(4)}(x) = -E'(x)(x^4 - 6x^2 + 3)/x$$

son alternativamente funciones pares y nones:

$$E^{(i)}(-w) = (-1)^i E^{(i)}(w), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Así, $R^{(i)}(\bar{x}) = -2(c-1/2)E^{(i)}(w)$ para $i = 1, 3$, y $R^{(i)}(\bar{x}) = E^{(i)}(w)$ para $i = 2, 4$; y, consecuentemente, definiendo $z = x - \bar{x}$, (A.1) puede expresarse como

$$e_1 + e_2 z + e_3 z^2 + z^3 = 0, \text{ con } e_1 =$$

$$- 12(c - 1/2)E'(w)/E^{(4)}(w) \quad (\text{A.3})$$

$$e_2 = 6E^{(2)}(w)/E^{(4)}(w) \text{ y } e_3 = - 6(c - 1/2)E^{(3)}(w)/E^{(4)}(w).$$

Usando ahora la transformación de Cardano, dada por la ecuación (4) en el texto, se puede describir la ecuación cúbica en (A.3) como

$$[z - r(c, w)]^3 - v(c, w)[z - r(c, w)] - u(c, w) = 0, \quad (\text{A.4})$$

donde r , v y u son funciones de los parámetros c y w :

$$r(c, w) = 2(c - 1/2)E^{(3)}(w)/E^{(4)}(w), \quad (\text{A.5})$$

$$v(c, w) = 3r(c, w)^2 - 6E^{(2)}(w)/E^{(4)}(w) \quad \text{y}$$

$$u(c, w) = v(c, w)r(c, w) - r(c, w)^3 + 12(c - 1/2)E'(w)/E^{(4)}(w).$$

El siguiente paso involucra la linealización de estas funciones alrededor de $(c, w) = (1/2, 1)$. Puesto que es inmediato de (A.5) que $r(1/2, 1) = 0$ y $r_w(1/2, 1) = 0$, entonces

$$r(c, w) \approx r_c(1/2, 1)(c - 1/2) = - 2(c - 1/2). \quad (\text{A.6})$$

Asimismo, puesto que $v(1/2, 1)$, $v_c(1/2, 1)$, $u(1/2, 1)$ y $u_w(1/2, 1)$ son todas iguales a cero, como puede ser fácilmente verificado, entonces

$$v(c, w) \approx v_w(1/2, 1)(w - 1) = 6(w - 1), \quad \text{y} \quad (\text{A.7})$$

$$u(c, w) \approx u_c(1/2, 1)(c - 1/2) = - 6(c - 1/2).$$

Finalmente, (A.6) y (A.7), junto con $z = x - \bar{x}$, nos permiten describir (A.4) como $R'(x) = - m(x) = 0$, con $m(x)$ dada por la ecuación (19) en el texto.

B. Catástrofes cúspide en el caso general

Siguiendo el mismo razonamiento usado para derivar (16) en el texto, se puede mostrar que si la suma $b + \sigma^2$ no es necesariamente igual a uno, entonces la correspondiente $R(x)$, hallada después de remplazar (15) con (11), exhibe puntos cúspide solamente a lo largo de las coordenadas

$$(x, c, w) = (\bar{x}, 1/2, [b + \sigma^2]^{1/2}).$$

Similarmente, siguiendo los mismos pasos de la primera subsección de este apéndice, la superficie de decisiones óptimas alrededor de estos puntos cúspide resulta ser $dR/dx = -m(x) = 0$, donde

$$m(x) = -(\bar{x} - \bar{r})^3 + \bar{v}(x - \bar{r}) + \bar{u}, \text{ con } \bar{r} = [(\mu_1 + \mu_2)/2] - (2c - 1)(b + \sigma^2)^{1/2},$$

$$\bar{u} = (6c - 3)(b + \sigma^2)^{3/2}, \text{ y } \bar{v} = 3[\mu_1 - \mu_2 - 2(b + \sigma^2)^{1/2}](b + \sigma^2)^{1/2}.$$

C. Derivación de la ecuación (22)

Puede ser mostrado (ver, por ejemplo, Karlin y Taylor, 1981, p. 220) que la densidad estacionaria satisface el siguiente caso particular de la ecuación adelantada de Kolmogorov (Fokker-Plank):

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} [qb(x)/2] - m(x)b(x) \right\} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Haciendo $F(x) = \exp(\int^x [2m(y)/q]dy)$, la solución a (A.8) está dada por

$$b(x) = Cf(x) + Kf(x) \int^x [1/f(z)]dz, \quad (\text{A.9})$$

donde C y K son constantes tales que $b(x)$ es una densidad sobre la recta real. Pero nótese que $F(x)\int^x [1/f(z)]$ no está acotada. Por ello, K tiene que ser igual a cero en (A.9), de otra forma $b(x)$ no sería una densidad. La ecuación (22) en el texto se deduce entonces.

Traducción de Daniel G. Garcés Díaz

Referencias

- Aroian, L.A. (1948). "The Fourth Degree Exponential Distribution", *Annals of Mathematical Statistics*, 19 (diciembre), pp. 589-592.
- Balasko, Y. (1978). "Economic Equilibrium and Catastrophe Theory: An introduction", *Econometrica*, 46 (mayo), pp. 360-374.
- Cobb, L. (1978). "Stochastic Catastrophe Models and Multimodal Distributions", *Behavioral Science*, 23 (septiembre), pp. 360-374.
- _____. (1981). "The Multimodal Exponential Families of Statistical Catastrophe Theory", en C. Taillie et al. (ed.), *Statistical Distributions in Scientific Work*, vol. 4, Dordrecht, Holanda, Reidel Press, pp. 67-90.
- Cobb, L., P. Koppstein y N.H. Chen (1986). "Estimation and Moment Recursion Relations for Multimodal Distributions of The Exponential Family", *Journal of the American Statistical Association*, 78 (marzo), pp. 124-130.

- Eaton, J., M. Gersovitz y J.E. Stiglitz (1986). "The Pure Theory of Country Risk", *European Economic Review*, 30 (junio), pp. 481-513.
- Edwards, S. (1984). "Ldc Foreign Borrowing and Default Risk: An Empirical Investigation, 1976-1980", *American Economic Review*, 74 (septiembre), pp. 726-734.
- _____. (1986). "The Pricing of Bonds and Bank Loans in International Markets: An Empirical Analysis of Developing Countries' Foreign Borrowing", *European Economic Review*, 30 (junio), pp. 565-589.
- Fisher, R.A. (1922). "On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics", *Philosophical Transactions of The Royal Society of London*, Ser. A, 222, pp. 309-368.
- _____. y W. Jammernegg (1986). "Empirical Investigation of a Catastrophe Theory Extensions of the Phillips Curve", *Review of Economics and Statistics*, 68 (febrero), 9-17.
- Guttentag, J.M. y R. Herring (1985a). "Comercial Bank Lending to Developing Countries: From Overlending to Underlending to Structural Reform", en G.W. Smith y J.T. Cuddington (eds.), *International Debt and Developing Countries*, Washington, The World Bank, pp. 129-150.
- _____. (1985b). *The Current Crisis in International Lending*, Washington, The Brookings Institution.
- Jarque, C.M. y A. Bera (1987). "A Test for Normality of Observations and Regression Residuals", *International Statistical Review*, 55 (agosto), pp. 163-172.
- Kadane, J.P. y D.T. Chuang (1978). "Stable Decisions Problems", *Annals of Statistics*, 6 (septiembre), pp. 1095-1110.
- Karlin, S. y H.M. Taylor (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*, Nueva York, Academic Press.
- Lindley D.V. (1976). "A Class of Utility Functions", *Annals of Statistics*, 4 (enero), pp. 1-10.
- Matz, A.W. (1978). "Maximum Likelihood Parameter Estimation for the Quartic Exponential Distribution", *Technometrics*, 20 (noviembre), pp. 475-484.
- Miller, L.H. (1956). "Table of Percentage Points of Kolmogorov Statistics", *Journal of the American Statistical Association*, 51 (marzo), pp. 111-121.
- Smith, J.Q. (1979). "Mixture Catastrophes and Bayes Decision Theory", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 86, pp. 91-101.
- _____. , P.J. Harrison y E.C. Zeeman (1981). "The Analysis of some Discontinuous Process", en D.K. Sinha (ed.), *Catastrophe Theory and Applications*, Nueva Delhi, South Asian Publishers, pp. 23-52.
- Thom, R. (1975). *Structural Stability and Morphogenesis*, Massachusetts, W.A. Benjamin.
- Urzúa, C.M. (1986). "Foreign Debt and the Less Developed Countries: An Empirico-Theoretical Examination of the Failure of a Market", tesis doctoral, Universidad de Wisconsin en Madison.
- _____. (1988). "A Class of Maximum-Entropy Multivariate Distributions", *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 17 (12), pp. 4039-4057.
- _____. (1989). "Tests for Multivariate Normality of Observations and Residuals", manuscrito presentado en el IX Encuentro Latinoamericano de la Sociedad Econométrica Internacional, Santiago de Chile, agosto.
- Zeeman, E.C. (1977). *Catastrophe Theory: Selected Papers, 1972-1977*, Massachusetts, Addison Wesley.