CONTROL ADAPTABLE DE UN MODELO NO LINEAL DE CRECIMIENTO MONETARIO NEOCLÁSICO

Rafael Kelly
Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Universidad Autónoma de Nuevo León

Enrique Casares y Gilma Garza
Departamento de Economía
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

I. Introducción

En este artículo presentamos una aplicación de la teoría de control adaptable a un modelo económico dinámico. El propósito de este trabajo no es tanto agregar elementos puros a la teoría económica, sino mostrar las bondades de esta novedosa técnica matemática en la solución de los modelos económicos. Dichas aplicaciones pueden ser tanto a modelos dinámicos como a modelos estáticos, teóricos o empíricos. Consideramos que el uso de la teoría de control adaptable dará una nueva perspectiva más flexible a la solución de los modelos económicos.

Cuando se trabajo empíricamente con modelos económicos dinámicos o estáticos es usual que el valor numérico de los parámetros asociados a las variables que definen el modelo se estime mediante diversos métodos de estimación, utilizando series temporales o transversales de datos. Como ejemplo podemos citar el algoritmo de estimación de mínimos cuadrados en sus diferentes facetas. Cuando se está analizando, por medio de un modelo, una cierta economía y se produce un punto de "quiebre" histórico por cualquier evento, el valor de los parámetros estimados no reflejará adecuadamente la nueva situación económica. Esas estimaciones pueden no corresponder a los valores verdaderos e incluso estar sustancialmente alejados de ellos. Esta misma situación se presenta cuando existe poca confiabilidad en los datos utilizados. Una solución a este problema es fijar los valores de los parámetros de una forma heurística, teniendo en cuenta la experiencia del planificador; otra es suponer que el valor del parámetro es desconocido, en lugar de asignarle un valor arbitrario.

La principal característica de la teoría de control adaptable es la de aplicarse a modelos dinámicos con parámetros desconocidos. Al diseñar un controlador adaptable para un cierto modelo, se podrá observar el comportamiento dinámico de las variables de política económica o de control que asegura el cumplimiento del objetivo de control, controlador que está estimando sus parámetros (que dependen de los parámetros del modelo) sin que éstos tengan que converger a los valores verdaderos.[1] El análisis y diseño de sistemas de control adaptable ha sido un tema de extensas investigaciones en las últimas dos décadas. Sin embargo, el problema de estabilidad global, tanto de sistemas de control discreto como continuos, no fue resuelto sino hasta 1980, y representó un gran avance en el campo del control adapatable.[2]

En este artículo consideramos el control adaptable de un modelo de crecimiento con dinero propuesto por J.L. Stein (1969), en el cual la tasa de crecimiento de la oferta monetaria es considerada como la variable de política económica o de control. La mayor dificultad en el diseño del controlador es el hecho de suponer como totalmente desconocido un parámetro del modelo. Esta incertidumbre hace que no sea trivial el diseño del controlador y por tanto se hace indispensable la utilización de un control adaptable.

La formulación del problema de control consiste en determinar la tasa de variación de la oferta monetaria tal que el nivel de producción por unidad de capital siga una trayectoria deseada, determinada en forma independiente a la formulación del modelo. Esta trayectoria deseada puede ser cualquiera que seleccione el planificador. Dicha trayectoria podría ser una trayectoria óptima, en el caso de que por medio de otras ecuaciones diferentes de las del modelo a controlar se optimizara un cierto criterio y se generara en este sentido una trayectoria deseada óptima.

La estructura del controlador propuesto para resolver el problema planteado consiste en una retroalimentación no lineal de la relación trabajo-capital. Se demuestra que el sistema adaptable en malla cerrada es globalmente estable en el sentido de que todas las variables permanecen acotadas y que el objetivo de control se logra asintóticamente.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección II se describe brevemente un modelo neoclásico de crecimiento con dinero. En la III se presentan los conceptos teóricos de linealización por retroalimentación, así como su aplicación concreta al modelo económico. Además se diseña el controlador adaptable. En la IV se describe el análisis de estabilidad y los principales resultados, así como algunas simulaciones para ilustrar estos últimos. En la sección V se ofrecen unas breves conclusiones.

[1] Para una mayor explicación del concepto de control adatable y su explicación a la economía, véase Kelly *et al.* (1989) y Casares *et al.* (1989).

[2] Ver Narendra *et al.* (1980), Morse (1980), Goodwin *et al.* (1980). Un excelente resumen sobre la teoría de control adaptable puede consultarse en Astrom (1983) y Astrom (1987).

II. Un modelo de crecimiento con dinero

Con la finalidad de obtener un controlador adaptable específico y realizar además simulaciones numéricas del modelo con el controlador se especificaron funciones particulares de comportamiento para el modelo monetario neoclásico de crecimiento propuesto por J.L. Stein en Stein (1969) y presentado por G. Gandolfo (1971). Este modelo incluye un mercado de bienes y otro de dinero descritos por una función de producción, una función para la demanda de saldos reales y otra para el ahorro; todas las variables del modelo están definidas por unidad de capital.

Se supone que el único bien en la economía se produce mediante una función de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala, por lo que podemos expresar el producto en términos de unidades de capital como:

$$y = k^{1-\alpha}$$

donde:

y: producto por unidad de capital
k: relación de trabajo efectivo por unidad de capital
α: parámetro de distribución del producto

Hay que resaltar que se puede utilizar cualquier tipo de función de producción mientras ésta sea homogénea de grado uno, para satisfacer con las condiciones de producción neoclásicas. La fuerza de trabajo crece a una tasa n exógenamente determinada, es decir, $L(t) = L(0)e^{nt}$.

La función de ahorro real deseado por unidad de capital está descrita por:

$$S/K = dy - e\theta v$$

donde:

S/K: ahorro planeado por unidad de capital
d: propensión marginal a ahorrar del producto real por unidad de capital.
e: propensión marginal a ahorrar de los activos netos del sector privado sobre el sector público por unidad de capital.
θv: activos netos del sector privado sobre el sector público por unidad de capital; en donde θ es la proporción de activos monetarios netos del sector privado sobre el sector público por unidad de dinero y v son los saldos reales por unidad de capital.

La introducción de θ nos da la diferencia entre dinero interno y externo. Si θ es igual a uno todo es dinero externo; si θ es igual a cero todo el dinero es interno.

Usando la función de producción podemos reescribir la ecuación de ahorro deseado por unidad de capital como:

$$S/K = d\,k^{1-\alpha} - e\theta v$$

Se supone por simplicidad una función lineal para la demanda de saldos reales por unidad de capital que está positivamente relacionada con el producto por unidad de capital y los activos netos del sector privado sobre el sector público y negativamente relacionada con el rendimiento esperado del capital real. El rendimiento esperado del capital se define como $r(k) + \pi^e$, en donde π^e es la tasa esperada de inflación y:

$$r(k) = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha k^{1-\alpha} = \text{productividad marginal del capital.}$$

Suponiendo que $\pi = \pi^e$ en donde π es la tasa de equi''brio de inflación y considerando las condiciones de equilibrio monetario tenemos que $\pi^e = u - n$, donde u es la tasa de variación de la oferta monetaria, la cual será la variable de control.

Por tanto, la demanda por saldos reales por unidad de capital está descrita entonces por:

$$M_d = ay - b[\alpha k^{1-\alpha} + \mu - n] + c\theta v$$

donde:

M_d: demanda de saldos reales por unidad de capital.
a: propensión marginal a manntener saldos reales del ingreso real por unidad de capital.
b: propesión marginal a mantener saldos reales del rendimiento esperado del capital.
c: propensión marginal a mantener saldos reales de los activos netos del sector privado sobre el sector público.

Usando la función de producción podemos reescribir la demanda por saldos reales por unidad de capital como:

$$M_d = ak^{1-\alpha} - b[\alpha k^{1-\alpha} + \mu - n] + c\theta v$$

Existen dos condiciones de equilibrio, una para el mercado de bienes y otra para el mercado monetario. Por hipótesis en los modelos neoclásicos se supone que el crecimiento del capital (K) o inversión real (I) es siempre igual al ahorro, supuesto que implica que el mercado de bienes está siempre en equilibrio. Esto es:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{I}{K} = \frac{S}{K} = dk^{1-\alpha} - e\theta v$$

Mientras que el mercado de dinero está en equilibrio cuando la oferta real de dinero por unidad de capital (v) es igual a la demanda por saldos reales por unidad de capital. Esta condición de equilibrio establece que:

$$v = ak^{1-\alpha} - b[\alpha k^{1-\alpha} + \mu - n] + c\theta v$$

en donde se mantiene en todo momento, o bien:

$$v = \frac{(a - b\alpha)k^{1-\alpha} - b(\mu - n)}{1 - c\theta}$$

Ambas condiciones de equilibrio se reducen a:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \left[\frac{(1 - c\theta)d - e\theta(a - b\alpha)}{1 - c\theta}\right] k^{1-\alpha} + \left(\frac{e\theta b}{1 - c\theta}\right)(\mu - n)$$

Por definición de $k = L/K$ sabemos que:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{K}}{K}$$

Sustituyendo $\dot{K}/K$ y $\dot{L}/L = n$ en esta ecuación obtenemos la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la relación trabajo-capital a través del tiempo. El modelo completo consiste en las siguientes dos ecuaciones que describen el comportamiento general del modelo:

$$\dot{k} = \left\{n - \left[\frac{(1 - c\theta)d - e\theta(a - b\alpha)}{(1 - c\theta)}\right] k^{1-\alpha} - \frac{eb\theta(\mu - n)}{(1 - c\theta)}\right\} k$$

$$y = k^{1-\alpha}$$

En forma compacta podemos reescribirlas como:

$$\dot{k} = [n - \xi_1 k^{1-\alpha} + \xi_2 - \xi_3\mu]k \qquad (2.1)$$

$$y = k^{1-\alpha} \qquad (2.2)$$

donde:

$$\xi_1 = \frac{(1 - c\theta)d - e\theta(a - b\alpha)}{(i - c\theta)} \tag{2.3}$$

$$\xi_2 = \frac{eb\theta n}{1 - c\theta} \tag{2.4}$$

$$\zeta_3 = \frac{eb\theta}{1 - c\theta} \tag{2.5}$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) describen un sistema dinámico cuya entrada es $\mu(t)$, la tasa de crecimiento de la oferta monetaria y salida es $y(t)$, el nivel de producción por unidad de capital.

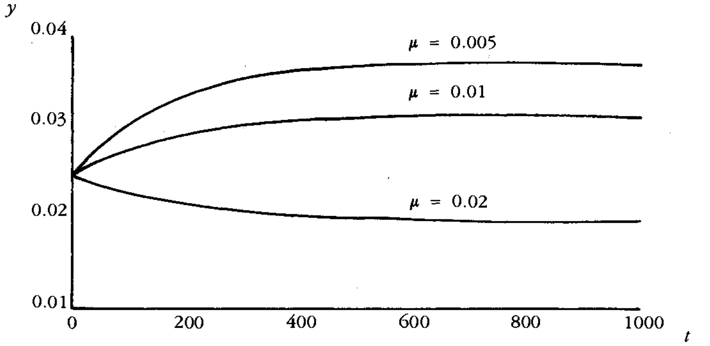
Se supone que los parámetros en las ecuaciones (2.3) a (2.5) son constantes positivas reales. Como $0 < \alpha < 1$ y por definición $0 \leq \theta \leq 1$ y $0 < c < 1$ entonces ξ_2 y ξ_3 son constantes positivas. Además ξ_1 será positiva si $b\alpha > a$. Nótese que si θ se supone desconocido, también lo serán las constantes ξ_1, ξ_2 y ξ_3. Cabe aclarar en este punto que el controlador adaptable que se desarrollará en la próxima sección requiere sólo conocer n y α. Esto significa que no es necesario conocer ningun otro parámetro aparte de n y α, a condición solamente de garantizar el conocimiento del signo de ξ_3 (sin pérdida de generalidad se supondrá positivo). En relación con la parte dinámica del modelo es bien sabido que para todo $\mu(t){:}\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ la solución de (2.1) es positiva $[k(t) > 0]$ para todo $t \geq 0$.

El modelo de crecimiento con dinero presentado nos dice que en el estado estable la economía se encuentra en una situación en que la tasa de crecimiento del capital es igual a la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo, implicando con esto un crecimiento económico equilibrado. Supongamos que las autoridades monetarias de esta economía deciden aumentar la tasa de crecimiento de la oferta monetaria. Esto provoca un aumento de la de inflación; por los supuestos, esto ocasiona también un incremento semejante en la tasa esperada de inflación. Por lo anterior, y tomando en consideración la función de demanda de saldos reales por unidad de capital, esta demanda disminuirá ya que el rendimiento esperado del capital real aumenta. Por condición de equilibrio monetario, la oferta de saldos reales por unidad de capital descenderá, lo cual inducirá, por medio de la función de ahorro por unidad de capital, un aumento del ahorro por unidad de capital, implicando un mayor nivel de inversión por unidad de capital. Esto conducirá a un decremento en la relación trabajo-capital y consecuentemente a una reducción de la relación producto-capital. Por tanto el dinero no es neutral, ya que una variación en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria mueve los valores de equilibrio de las variables reales, lo cual es válido para valores de $\theta > 0$. Si $\theta = 0$, el dinero será un velo.

Para mostrar el comportamiento dinámico del modelo se realizó una simulación en malla abierta. Los valores numéricos de los parámetros del modelo empleados en las simulaciones fueron los considerados por G. Gandolfo (1971): $a = 0.53$, $b = 100$, $c = 0.66$, $d = 0.2$, $e = 0.01$, $n = 0.01$, $\alpha = 0.33$ y $\theta = 0.3$. La condición inicial fue $k(0) = 0.0040$. Los resultados se muestran en la figura 1 para $\mu = 0.005$, 0.01 y 0.02. Se observa la evolución de la producción por unidad de capital (y). Este comportamiento concuerda con lo predicho.

Figura 1

Respuestas en malla abierta



A continuación presentaremos el problema del control adaptable del modelo.

III. Diseño del controlador adaptable

El problema de control consiste en determinar la tasa de variación de la masa monetaria de tal forma que la producción por unidad de capital siga una trayectoria deseada en el tiempo. Sobre la trayectoria $y_d{:}\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ se supondrá que es continua y acotada así como su derivada temporal.

Enseguida se presentan algunas definiciones a las que se hará referencia posteriormente.

Sea $\mathbf{R}_+$ el conjunto de números reales no negativos y $\mathbf{R}^n$ *el espacio vectorial* n-dimensional de números reales sobre el campo de los reales $\mathbf{R}$. Defínanse los siguientes espacios vectoriales de funciones:

$$L_2^n = \{ x{:}\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n | \int_0^\infty \| x(t)\|^2 \, dt < \infty \}$$

$$L_\infty^n = \{ x{:}\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n | \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbf{R}_+} \| x(t)\|^2 < \infty \}$$

donde $\| \cdot \|$ denota la norma euclidiana. Los espacios L_2^n y L_∞^n son comúnmente empleados en el análisis denominado entrada-salida de sistemas interconectados. Véase, por ejemplo Desoer y Vidyasagar (1975).

1. *Conceptos básicos de linealización por retroalimentación de estado*

Una clase importante de modelos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales pueden tener un comportamiento rigurosamente lineal desde las entradas exógenas a las salidas endógenas mediante el empleo de retroalimentación no lineal del estado. Es importante recalcar que no se habla de una aproximación lineal de ecuaciones no lineales, sino de una rigurosa linealización mediante retroalimentación de estado.

Una excelente revisión de la teoría de linealización por retroalimentación de estado puede encontrarse en Isidori (1986).

En la presente sección se presentan las ideas básicas de dicha teoría para ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

donde $x \in \mathbf{R}^n$, f, g, h son funciones suaves, es decir, diferenciables un número infinito de veces.

Linealización desde la entrada al estado

La linealización del modelo no lineal desde la entrada al estado mediante retroalimentación de estado es inmediata si $g(x) \neq 0$ para todo x. En este caso la ley de control está dada por:

$$u = \frac{1}{g(x)}(-f(x) + v)$$

donde v es una nueva entrada que se especificará posteriormente. Remplazando esta elección de u en el modelo no lineal se obtiene:

$$\dot{x} = v$$

es decir, una ecuación diferencial lineal relacionando el estado x a la nueva entrada v.

Para resolver el problema de seguimiento, esto es, para determinar u de forma que $y(t) \rightarrow y_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ donde y_d y $\dot{y}_d$ son funciones continuas y acotadas es necesario suponer sobre el modelo no lineal que: $h^{-1}(y)$ y $\partial h^{-1}/\partial y$ están definidas y que $h^{-1}(x_1) \rightarrow h^{-1}(x_2) \Rightarrow x_1 \rightarrow x_2$ con x_1, $x_2 \in \mathbf{R}^n$. Bajo estos supuestos, la nueva entrada v suele definirse como:

$$v = \dot{x}_d + A(x_d - x)$$

con A una matriz definida positiva y $x_d = h^{-1}(y_d)$. Con estas elecciones de v y u, remplazando esta última en el modelo no lineal se obtiene:

$$\dot{\tilde{x}} = - A\tilde{x}$$

donde $\tilde{x} = x_d - x$. Nótese que la ecuación anterior es exponencialmente estable debido a que A fue seleccionada definida positiva. Esto significa que $\tilde{x}(t) = h^{-1}(y_d) - h^{-1}(y) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y en consecuencia $y(t) \rightarrow y_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Linealización desde la entrada a la salida

Derivando y con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x)u \\ &= L_f h(x) + L_g h(x)u \end{aligned}$$

donde $L_f h(x):\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ y $L_g h(x):\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ son las denominadas derivadas de Lie de h con respecto a f y g respectivamente. Si $L_g h(x)$ es diferente de cero para toda x, entonces la ley de control está dada por

$$u = \frac{1}{L_g h}(- L_f h + v)$$

en malla cerrada con el modelo resulta:

$$\dot{y} = v$$

es decir, una ecuación diferencial lineal con la nueva entrada exógena v y salida endógena y.

En el caso que $L_g h(x) = 0$ para todo x, entonces derivando y con respecto a tiempo:

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)\, u$$

donde $L_f^2h(x)$ significa $L_f(L_fh)(x)$ y $L_gL_fh(x) = L_g[L_fh(x)]$. Nuevamente si $L_gL_fh(x) \neq 0$ para toda x entonces la ley de control será:

$$u = \frac{1}{L_gL_fh(x)}(-L_f^2h(x) + v)$$

en malla cerrada con el modelo satisface

$$\ddot{y} = v.$$

En forma general, si γ es el entero más pequeño tal que $L_gL_f^ih(x) = 0$ para $i = 0, \ldots, \gamma - 2$ y $L_gL_f^{\gamma-1}h(x) \neq 0$ para toda x, entonces la ley de control:

$$u = \frac{1}{L_gL_f^{\gamma-1}h(x)}(-L_f^\gamma h + v)$$

en malla cerrada con el modelo resultará:

$$y^{(\gamma)} = v.$$

El entero se conoce como grado relativo del modelo. La nueva entrada exógena v suele seleccionarse como

$$v = y_d^{(\gamma)} + \alpha_\gamma(y_d^{(\gamma-1)} - y^{(\gamma-1)}) + \ldots + \alpha_1(y_d - y)$$

donde y_d es una trayectoria deseada. Es importante observar que finalmente con la anterior selección el comportamiento del modelo con la ley de control es gobernado por:

$$e^{(\gamma)} + \alpha_\gamma e^{(\gamma-1)} + \ldots + \alpha_1 e = 0$$

donde $e = y_d - y_m$. Obsérvese que se trata de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. El objetivo de control ($e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$) será verificado si las constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_\gamma$ se seleccionan de forma que el polinomio:

$$s^{(\gamma)} + \alpha_\gamma s^{(\alpha-1)} + \ldots + \alpha_1 = 0$$

tenga todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo.

2. *Control no lineal de un modelo de crecimiento monetario*

Con los conceptos expuestos en la sección anterior, se está en condiciones de diseñar un controlador no lineal para el modelo de Stein (1969).

Las ecuaciones correspondientes al modelo (2.1) y (2.2) pueden expresarse en la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

donde $x \in \mathbf{R}$ y

$$f(x) = nx - \xi_1 x^{2-\alpha} - \xi_2 x$$

$$g(x) = -\xi_3 x$$

$$h(x) = x^{1-\alpha}$$

con $x = k$ y $u = \mu$.

Nótese que $g(x) \neq 0$ para el rango de x permisibles ($x > 0$), que $x = h^{-1}(y) = y^{1/1-\alpha}$ y además $h^{-1}(y_d) - h^{-1}(y) / 0 \Rightarrow y_d - y \rightarrow 0$. Lo anterior valida el empleo de la ley de control basada en linealización desde la entrada al estado dada por:

$$u = \frac{1}{g(x)}(-f(x) + v)$$

$$u = -\frac{1}{\xi_3 x}[-(n - \xi_2)x + \xi_1 x^{2-\alpha} + \dot{x}_d + \beta(x_d - x)]$$

o finalmente como:

$$u = x^{-1}\left[-\frac{\xi_1}{\xi_3}x^{2-\alpha} + \frac{\xi_2}{\xi_3}x - \frac{1}{\xi_3}[-nx + \dot{x}_d + \beta\tilde{x}]\right] \quad (3.0)$$

con β una constante de diseño estrictamente mayor que cero y $x_d = h^{-1}(y_d)$.

Se puede proponer otra ley de control no lineal con base en linealización desde la entrada a la salida. Nótese en primer lugar que:

$$L_f h(x) = (1 - \alpha)[nx^{1-\alpha} - \xi_1 x^{2(1-\alpha)} - \xi_2 x^{1-\alpha}]$$

$$L_g h(x) = -\xi_3(1 - \alpha)x^{1-\alpha}$$

Para el rango de valores permisibles de $x (x > 0)$ se tiene que $L_g h(x) \neq 0$, por lo que la ley de control basada en linealización desde la entrada a la salida es:

$$u = \frac{1}{L_g h(x)}[-L_f h(x) + v]$$

de donde después de algunas simplificaciones se obtiene:

$$u = \frac{n - \xi_2}{\xi_3} - \frac{\xi_1}{\xi_3} x + \frac{x^{\alpha-1}}{\xi_3(1 - \alpha)} [\dot{y}_d + \beta(y_d - y)]$$

con β una constante de diseño estrictamente positiva.

3. *Control adaptable*

Como las constantes ξ_1, ξ_2 y ξ_3 se supusieron desconocidas, entonces las leyes de control presentadas anteriormente no se pueden emplear en la práctica para calcular los valores de la acción de control u.

La formulación del problema de control adaptable se pude establecer en la forma siguiente. Considérese el modelo económico descrito por las ecuaciones (2.1) y (2.2). Supóngase que el parámetro θ, o cualquier otro, con excepción de n o α, es constante pero desconocido. El problema consiste en diseñar un controlador para calcular la tasa de crecimiento de la masa monetaria μ de tal forma que la producción por unidad de capital $y(t)$ siga asintóticamente una producción deseada por unidad de capital y_d.

La principal dificultad encontrada al momento de realizar el diseño del controlador estriba en que se desconoce el valor numérico del parámetro θ involucrado en el modelo (2.1) y (2.2).

Para resolver el problema anterior, se propone el siguiente controlador adaptable, el cual consiste de una ley de control y una ley de adaptación. La estructura de la ley de control corresponde a la del controlador no lineal basado en linealización desde la entrada al estado presentada en la subsección 2.

Ley de control:

$$\mu = k^{-1}(- \hat{\theta}_1 k^{2-\alpha} + \hat{\theta}_2 k - \hat{\theta}_3(- nk + \dot{k}_d + \beta \tilde{k})) \tag{3.1}$$

donde

$$k_d = (y_d)^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \tag{3.2}$$

$$k = k_d - k \tag{3.3}$$

y β es cualquier constante positiva seleccionada por el diseñador. Los parámetros $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ son denominados los parámetros adaptables. Nótese que la ecuación (3.1) corresponde al controlador no lineal (3.0) con $k = x$, $\mu = u$, $\hat{\theta}_1 = \xi_1/\xi_3$, $\hat{\theta}_2 = \xi_2/\xi_3$ y $\hat{\theta}_3 = 1/\xi_3$.

La ecuación (3.1) puede rescribirse en forma compacta como:

$$\mu = \phi^T \hat{\theta} \tag{3.4}$$

donde:

$$\phi = \begin{bmatrix} -\tilde{k}^{1-\alpha} \\ 1 \\ n - \tilde{k}^{-1}\dot{\tilde{k}}_d - \beta \tilde{k}^{-1} \hat{\tilde{k}} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

El vector de parámetros adaptables $\hat{\theta}$ se determina por medio de la siguiente *ley de adaptación:*

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \phi \tilde{k} \hat{\tilde{k}} \tag{3.7}$$

donde $\Gamma \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ es una matriz definida positiva seleccionada por el diseñador. Generalmente Γ es una matriz diagonal.

Es importante notar que existe un vector constante $\theta^* \in \mathbf{R}^3$ dado por:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{\xi_1}{\xi_3} & \frac{\xi_2}{\xi_3} & \frac{1}{\xi_3} \end{bmatrix}^T \tag{3.8}$$

tal que si se remplaza $\hat{\theta}$ por θ^* en la ecuación (3.4) y se combina con la (2.3), el sistema en malla cerrada estará gobernado por:

$$\dot{\hat{\tilde{k}}} + \beta \hat{\tilde{k}} = 0 \tag{3.9}$$

de donde se concluye que $\hat{\tilde{k}}(t) \to 0$ cuanto $t \to \infty$. Finalmente, de (2.2) y (2.3) se concluye que $y(t) \to y_d(t)$ cuando $t \to \infty$. Sin embargo, como θ es supuesto conocido, también lo son ξ_1, ξ_2 y ξ_3 y entonces θ^* no puede intercambiarse por $\hat{\theta}$ en la ecuación (3.4).

IV. Análisis

En esta sección se presenta el análisis del sistema adaptable en malla cerrada. Nuestro resultado pincipal de estabilidad global se enuncia enseguida.

Teorema 1. Considérese el modelo económico descrito por las ecuaciones (2.1) y (2.2), en malla cerrada con la ley de control (3.1) y la ley de adaptación (3.7). Supóngase que θ es una constante desconocida. Entonces, se tiene lo siguiente:

a] $\hat{\theta} \in L_\infty^3$

b] $\hat{k} \in L_2 \cap L_\infty$

c] $|y - y_d| \in L_2 \cap L_\infty$

Además, como y_d e $\dot{y}_d$ son funciones acotadas, entonces:

d] $\hat{k}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

e] $\| y(t) - y_d(t) \| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. El primer paso consiste en rescribir el sistema en malla cerrada en términos del llamado modelo del error (Anderson *et al.*, 1986). Para ello defínase el vector de errores paramétricos $\tilde{\theta}$ como $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$. Combinando las ecuaciones (2.3) y (3.1.), se obtiene:

$$\dot{k} - nk + \xi_1 k^{2-\alpha} - \xi_2 k = -\xi_3[-\hat{\theta}_1 k^{2-\alpha} + \hat{\theta}_2 k - \hat{\theta}_3(-nk + k_d + \beta\tilde{k})] \tag{4.1}$$

y usando la definición de $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ con la ecuación (3.8), la (4.1) se reduce a:

$$\dot{\tilde{k}} + \beta\tilde{k} = \xi_3 \tilde{\theta}^T k \phi \tag{4.2}$$

Por otro lado, notando que $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$, ya que θ^* es un vector constante, de la ley de adaptación (3.7) se obtiene:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma\phi k\tilde{k} \tag{4.3}$$

Las ecuaciones (4.2) y (4.3) definen las ecuaciones del modelo del error. El origen $[\tilde{\theta}\ \tilde{k}] = 0$ es un equilibrio de dichas ecuaciones. Para su análisis considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\theta}, \tilde{k}) = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} + \frac{1}{\xi_3}\tilde{k}^2) \geq 0 \tag{4.4}$$

Recuérdese que ξ_3 es una constante positiva. La derivada de (4.4) con especto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (4.2) y (4.3) es:

$$\dot{V}(\tilde{\theta}, \tilde{k}) = -\frac{\beta}{\xi_3}\tilde{k}^2 \leq 0 \tag{4.5}$$

Aplicando el método directo de Lyapunov se concluye estabilidad del equilibrio. De las ecuaciones (4.4) y (4.5) se concluye que $\tilde{\theta} \in L_\infty^3$ y $k \in L_2 \cap L_\infty$. Esto demuestra los inicios a] y b]. El c] sigue directamente de las ecuaciones (2.2) y (3.2).

Para demostrar d] y e] se procede como sigue. Nótese de la hipótesis de acotamiento de y_d y del inciso c] que $y(t)$ está también acotada. Esto último y la ecuación (2.2) implican que k está acotado.

Ya que k, k y k_d son funciones acotadas, entonces el vector ϕk está acotado, ya que:

$$\phi^T k = \begin{bmatrix} -k^{1-\alpha} \\ 1 \\ n - k^{-1}\dot{k}_d - \beta k^{-1}\tilde{k} \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} -k^{2-\alpha} \\ k \\ nk - \dot{k}_d - \beta \tilde{k} \end{bmatrix}$$

Entonces usando el inciso a], $\tilde{\theta}^T \phi k$ está acotada, y finalmente de la ecuación (4.2) se concluye acotamiento de k. Este último y $k \in L_2 \cap L_\infty$ (inciso c]) implican que $k(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Finalmente como:

$$\tilde{k} = k_d - k = y_d^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} - y^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}$$

entonces, $y(t) \to y_d(t)$ cuando $t \to \infty$. Esto completa la demostración.

El teorema 1 establece acotamiento de las funciones dentro del sistema adaptable en malla cerrada. Además, garantiza el cumplimiento del objetivo de control, *i.e.*, $y(t) \to y_d(t)$ si y_d y y_d son funciones acotadas.

Se realizó la simulación del sistema en malla cerrada formado por el modelo (2.1) y (2.2), la ley de control (3.1) y la ley de adaptación (3.7). Los parámetros de diseño del controlador adaptable fueron $\beta = 100$, $\Gamma = \mathrm{diag}\{50\}$ y $\hat{\theta}(0) = 0$. Tomando también los valores utilizados para la simulación en malla abierta. La función de producción deseada y_d se seleccionó como:

$$k_d = nk_d - \xi_1 k_d^{2-\alpha} + \xi_2 k_d - \xi_3 k_d\,(0.01).$$

$$y_d = k_d^{1-\alpha}$$

con $k_d(0) = 0.004$. Los resultados obtenidos de la simulación se muestran en la figura 2, donde aparece la evolución de la producción por unidad de capital real $y(t)$ y la deseada $y_d(t)$. Nótese que a pesar del desconocimiento del parámetro θ en el modelo, el sistema se comporta adecuadamente ya que $y(t) \to y_d(t)$ cuando $t \to \infty$. La evolución de la tasa de variación de la masa monetaria μ requerida para lograr el objetivo anterior se calcula con el controlador adaptable y se muestra en la figura 3. Nótese que $\mu(t) \to 0.01$ cuando $t \to \infty$, esto es, el valor requerido si el parámetro θ del modelo fuese conocido.

Figura 2

Producción por unidad de capital y(t)
y producción deseada por unidad
de capital deseado $y_d(t)$

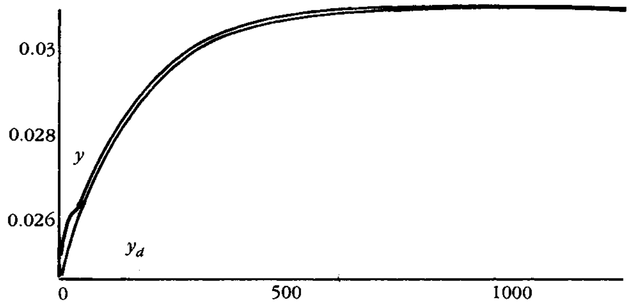


Figura 3

Tasa de incremento de la masa monetaria

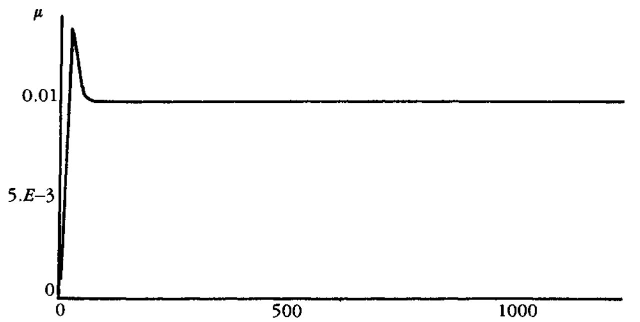
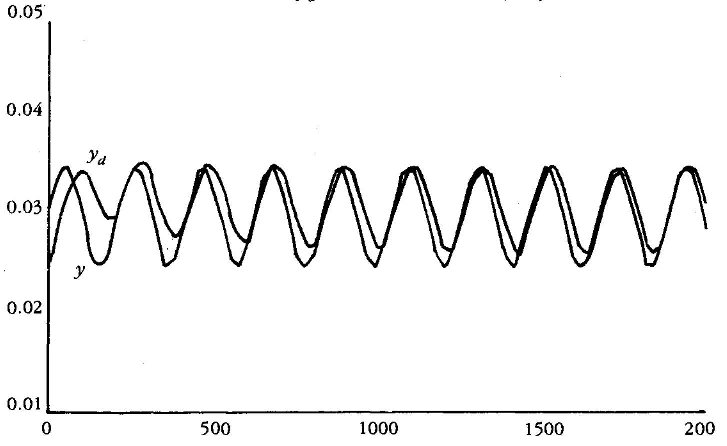


Figura 4

Producción por unidad de capital y(t)
y producción por unidad de capital
deseado $y_d(t) = .03 + .005\ sen\ (.03t)$



Para fines más ilustrativos, se simuló también el sistema en malla cerrada con los valores de la simulación en malla abierta considerando como función de producción deseada:

$$y_d(t) = 0.03 + 0.005\ \text{sen}(0.03t).$$

Los prámetros de diseño fueron: $\beta = 5$, $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$ con $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 1$ y $\gamma_3 = 10$. Los resultados obtenidos de la simulación presentados en la figura 4 muestran claramente que $y(t) \rightarrow y_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto significa que el objetivo de control es verificado.

V. Conclusiones

En el presente trabajo se ha presentado la aplicación de la técnica de control adaptable al control de un modelo dinámico económico de crecimiento monetario neoclásico.

El interés de la técnica de control adaptable se hace patente cuando el valor de los parámetros del modelo a controlar posee un alto grado de incertidumbre. Con frecuencia éste es el caso de modelos empleados en economía.

Debido al comentario anterior, los autores están convencidos de que la teoría de control adaptable es un nuevo camino que puede seguirse para su empleo extensivo en el control de modelos económicos.

Referencias

Anderson, B.D.O., R.R. Bitmead, C.R. Johnson, P.V. Kokotovic, R. Kosut, I.M.Y. Mareeis, L. Praly, B. Riedle (1986). *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis*, The MIT Press, Cambridge.

Astrom, K.J. (1983). "Theory and Applications of Adaptive Control-A Survey", en *Automatica*, vol. 19, núm. 5.

______ (1987). "Adaptive Feedback Control", en *Proceeding of the IEEE*, vol. 75, núm. 2, febrero.

Casares E., G. Garza, y R. Kelly (1989). "Stabilization of a Closed Economy Model Via Adaptive Control", en *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Dynamic Modelling & Control of National Economies*, 27-29 de junio, Edimburgo, Reino Unido.

Desoer, C., y M. Vidyasagar (1975). *Feedback Systems: Input-output Properties*, Academic Press.

Gandolfo, G. (1971). *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*, North-Holland, Amsterdam.

Goodwin, G., P. Ramadge y P. Caines (1980). "Discrete Time Multivariable Adaptive Control", en *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, junio.

Isidori, A. (1986). "Control of Nonlinear Systems Via Dynamic State Feedback", en M. Fliess y M. Hazewinkel (eds.), *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control*, Riedel, Dordrecht.

Kelly R., E. Casares y G. Garza (1988). "Modelos económicos dinámicos y control adaptable", en *Análisis Económico*, UAM-A, núm. 12-13, enero-junio y julio-diciembre.

Morse A. (1980). "Global Stability of Parameter Adaptive Systems", en *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, junio.

Narendra K., Lin. y L. Valavani (1980). "Stable Adaptive Controller Design", Parte II: "Proof of Stability", en *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, junio.

Stein, J.L. (1969). "Neoclassical and Keynes-Wicksell Monetary Growth Model", en *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 1, núm. 2, mayo.