PARADOJAS DE LA TEORÍA DEL CAPITAL: CUALQUIER COSA VA*

Andreu Mas-Colell
Universidad de Harvard

1. Introducción

Una primera aproximación al estudio de los aspectos intertemporales de la distribución de recursos (en adelante teoría del capital) consiste en concentrarse en los estados estables (los puntos de descanso) de los sistemas dinámicos asociados. Para no perder de vista el hecho de que esto no es un fin en sí mismo, existe una abundante literatura adicional que permite recoger información útil sobre el análisis de estado estable, una de las principales herramientas de la economía. Sin duda lo persuasivo de la noción del estado estacionario en la economía clásica y el hecho de que se puede hacer mucho sin utilizar matemáticas poderosas, también han contribuido a su popularidad.

Una excelente y avanzada introducción a la teoría del capital de estado estable para el caso de bienes múltiples (el enfoque de este trabajo), es la de Von Weizsäcker (1971). Los libros de Bliss (1975) y Burmeister (1980), los cuales son evaluaciones generales de la teoría del capital, también contienen buenas aproximaciones sobre los aspectos del análisis de estado estable.

A principios de 1950, Joan Robinson inició el análisis sistemático de estática comparativa de las economías de estado estable con varios bienes de capital (véase Robinson, 1953). Aunque las contribuciones fundamentales (y lentas en asentarse) de Von Neumann (1945-1946) y de Malinvaud (1953) son anteriores, el énfasis en estática comparativa era distinto del tradicional que Joan Robinson ayudó a promover.

La línea de investigación iniciada por J. Robinson culminó en los años sesenta con la verificación de muchos de los teoremas de estática comparativa, que si bien eran válidos para el caso de un bien de capital, no se gene-

* Este trabajo, para el que se contó con el apoyo de una Beca Guggenheim, se publicó en inglés en la compilación *Joan Robinson and Modern Economic Theory*, editado por George Feiwel, MacMillan Press, Nueva York, 1989.

ralizan al caso de bienes de capital múltiples. Para alguien familiarizado con esto último, el caso heterogéneo de un bien de capital implicaba modelos de comportamiento "extraño", "exótico", "paradójico"... Es importante agregar que esto no decepcionó a Joan Robinson y sus seguidores. Más bien, éste era el punto de interés, y así lo percibieron ellos. El proceso de discusión intelectual fue muy ruidoso y desató muchas controversias. La historia se ha contado muchas veces y no la repetiré de nuevo aquí (véanse las referencias de Bliss o Burmeister o, para un punto de vista de un militante robinsoniano, Harcourt, 1972).

Hay que considerar el ejemplo central al que me referiré en este trabajo: la dependencia del consumo en estado estable respecto a la tasa de interés (es decir, que sólo existe un bien de consumo). Para dar mayor sencillez al análisis me limito a un mundo sin cambios tecnológicos y sin crecimiento de la población. Un teorema relativamente básico y general, la regla dorada, afirma que el nivel máximo de consumo está asociado con una tasa de interés igual a la tasa de crecimiento de la población, la cual es cero. Además, el caso estándar de un bien de capital muestra una relación monotónica decreciente entre los niveles de consumo y la tasa de interés (figura 1a). Esto no puede ser generalizado, y actualmente es bien sabido que aun con dos bienes de capital es posible una asociación no monótona, como la que se muestra en la figura 1b (véase, por ejemplo, Burmeister, 1980, capítulo 4).

Figura 1a

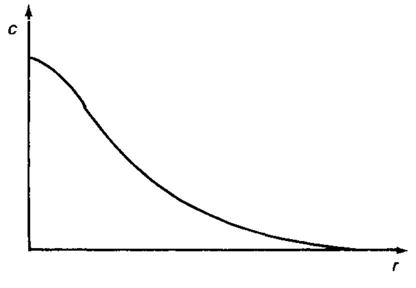
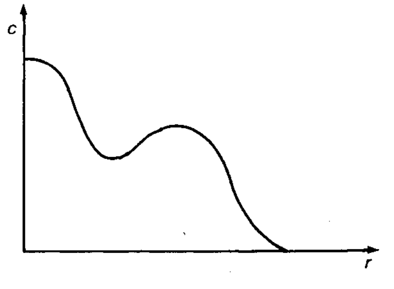


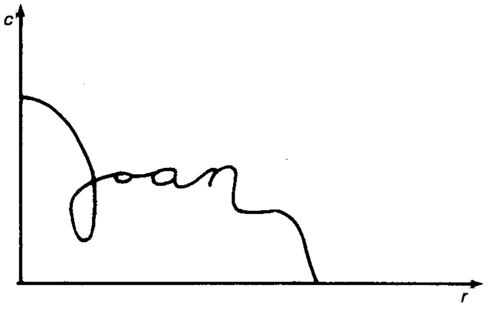
Figura 1b



El propósito de este trabajo es llevar este punto a su conclusión lógica (en otras palabras, a superar a la escuela de Cambridge con sus propios métodos) al mostrar que, en general (i.e. dos bienes de capital pero ninguna restricción específica en la tecnología más allá de la convexidad), no hay otro teorema de asociación a través de estados estables de niveles de consumo y tasas de interés que el de una versión un poco más fuerte de la regla dorada. El resultado de este trabajo indica, aproximadamente, que dados cualquier conjunto de pares de consumo y tasa de interés, digamos los de la figura 2, se puede encontrar una tecnología bien comportada, teniendo precisamente a este conjunto como el lugar geométrico de estado estable estático comparativo. El descubrimiento de un pequeño fortalecimiento en la regla dorada es una recompensa positiva menor de esta estrategia de investigación.

El lector informado notará que el proyecto que se lleva a cabo en este trabajo sigue un desarrollo paralelo al de la teoría del equilibrio general. Así como en la teoría del capital, la intensa investigación por parte de los teóricos del equilibrio general sobre estática comparativa y el tópico de estabilidad, que está muy relacionado, no proporciona resultados generales, y son pocos los que logran llenar las expectativas iniciales (la historia está bien contada por Arrow y Hahn, 1971). La investigación culmina con los resultados de Sonnenschein, Mantel y Debreu entre otros (véase Shafer y Sonnenschein, 1982 para un buen panorama sobre el tema), mostrando que, sólo por restricciones obvias (e.g. la Ley de Walras), un exceso de demanda en una economía de intercambio bien comportada literalmente puede ser cualquier cosa. Mi intención en este trabajo es estudiar el punto de Joan Robinson a la manera del teorema Sonnenschein-Mantel-Debreu.

Figura 2



Es interesante considerar por qué dos desarrollos analíticamente similares dieron pauta a dos estilos tan diferentes de debate científico: plácido y consensual, en el caso de la teoría del equilibrio general; turbulento y apasionado, en el de la teoría del capital. Haré un par de comentarios sobre esto, aunque creo que proporcionan una explicación pobre acerca de esta diferencia. Es más probable que estas razones se encuentren en la sociología del conocimiento y en el hecho de que, tal vez debido a la tradición marxista, la teoría del capital ha tendido a estar más cargada ideológicamente que otras teorías económicas. Ha habido una tendencia angustiante, en los dos bandos, a utilizar resultados analíticos para pelear.

El primer comentario toca un aspecto superficial, pero puede ser psicológicamente significativo. Está relacionado con las imágenes. Puede utilizarse la caja Edgeworth para exponer a nuestros ojos un extenso número de comportamientos complejos (e.g. multiplicidad de equilibrios, paradojas de transferencia, etc.). Por tanto, el terreno puede estar preparado para malas noticias en el caso del enésimo bien. Por el contrario, en la teoría del capital, el caso de un solo bien de capital únicamente se puede someter al análisis gráfico evidente. Sin embargo, las complejidades interesantes surgen cuando hay más de un bien de capital.

El segundo comentario es más profundo y revela, probablemente, mi punto de vista sesgado al analizar la teoría del capital como una parte del análisis de equilibrio general. Sin duda alguna, aun cuando los teóricos del equilibrio general quisieran tener teoremas de estática comparativa general, el hecho de que éstos no existan no se ve como el tiro de gracia para la teoría. La razón es que abundan los teoremas generales fundamentales (e.g. los teoremas de bienestar) y la fuerza de la teoría descansa en ellos. La interpretación de los resultados negativos es que la estática comparativa no es un área para reflexiones de escritorio, pero sí para evaluaciones empíricas de los parámetros. El "mundo real" puede o no ser simple. Si lo es, mejor para todos. Si no lo es, como es más probable, entonces todavía necesitamos, y tenemos, herramientas analíticas complejas para estudiarlo. Sin embargo, los valores de los parámetros que determinan las predicciones de estática comparativa tienen que calibrarse con recursos empíricos.

Creo que se puede establecer un punto similar para la teoría del capital en estado estable. Posiblemente no hay teoremas de estática comparativa general (aunque la regla dorada es general y no un resultado que se pueda olvidar), pero se cuenta con teoremas generales (e.g. el estado estable eficiente de corto plazo puede ser apoyado competitivamente por sistemas de precios proporcionales; un estado estable de corto plazo es eficiente en el largo plazo sólo si la tasa de crecimiento de la población es menor que la de interés). Lo que la estática comparativa "paradójica" nos ha enseñado es, simplemente, que modelar el mundo como si tuviera un solo bien de capital no se justifica *a priori*. Entonces, que así sea.

2. Teorema de la Regla Dorada

Para enfocar lo esencial, sólo consideraré una situación económica estacionaria sin ningún cambio tecnológico y sin crecimiento de la población.

Hay n bienes de capital. Los vectores de acervos de bienes de capital están denotados como x, y, $z \epsilon R^n$.

Sólo hay un bien de consumo denotado como c.

Las posibilidades tecnológicas intertemporales se describen en forma familiar pero muy reducida. Principalmente, hay una función $v(x, y)$ que proporciona el monto más alto de consumo posible hoy, si el vector de acervos de capital de hoy es x y el acervo de capital disponible mañana se limita a ser y.

Respecto a la tecnología, se hacen las siguientes hipótesis estándar. Suponiendo que $P = \{\Delta \epsilon R^n : z \gg 0\}$. Entonces, *$v$ definido* en $P \times P$, *es estrictamente cóncava, continuamente diferenciable y satisface*

$$v(0, y) \leqslant 0, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y) > 0, \frac{\partial v}{\partial y_i}(x, y) < 0$$

para cualquier $(x, y) \epsilon P \times P$.

Los supuestos de concavidad estricta y de que las derivadas parciales existen, sólo pretenden dar mayor sencillez al análisis. Nada de importancia económica depende de esto. Lo mismo es cierto sobre la posibilidad de permitir un consumo negativo. La desatención de estos vectores de acervos con algún componente igual a cero es más importante. Permitirlos requeriría alguna cualificación menor a nuestra conclusión.

Un *estado estable* es una configuración donde $x = y$. Usualmente este valor común se denota como z.

Sólo estamos interesados en cualquier estado cuya trayectoria estacionaria correspondiente sea dinámicamente eficiente (véanse las referencias en la introducción para los conceptos pertinentes y los resultados sobre la caracterización de la eficiencia). Gale (1973), proporciona una excelente interpretación.

Un estado estable (z, z) es eficiente si y sólo si satisface las dos condiciones que tienen un carácter de corto plazo y otro de largo plazo respectivamente.

La condición de corto plazo es que el estado estable descansa en un sistema de precios proporcionales. Para ser más precisos, debería haber un factor de tasa de interés r_z tal que:

$$\nabla_y v(z, z) = -(1 - r) \nabla_x v(z, z).$$

La condición de largo plazo es que el factor de interés r asociado con (z, z) debe ser tan grande como la tasa de crecimiento de la población. En nuestro caso, $r \geq 0$.

El propósito de este trabajo es investigar las características del lugar geométrico $L \subset R_+ \times R$, formado por los pares $(r_z, v(z, z))$ de tasas de interés y niveles de consumo, al tiempo que (z, z) varía sobre todos los posibles estados estables eficientes.

Una primera restricción sobre L se sigue del conocido y muy general,

Teorema de la Regla Dorada: los estados estables que maximizan el consumo entre todos los estados estables, se caracterizan por ser eficientes y tener una tasa de interés asociada igual a la tasa de crecimiento de la población, que en nuestro caso es cero.

Por tanto, *a fortiori* (la maximización sobre todos los estados estables implica la maximización sobre el subconjunto eficiente), tenemos que $c > c'$ cuando $(0, c) \epsilon L$, $(r, c') \epsilon L$ para algún $r \neq 0$, y $(0, c) \neq (r, c')$. El lugar geométrico representado en la figura 3a es inadmisible.

Figura 3a

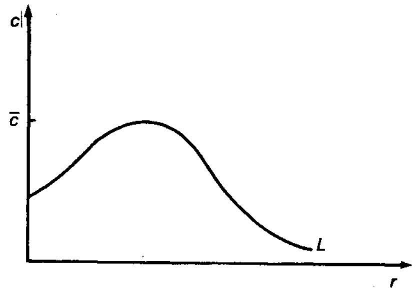


Figura 3b

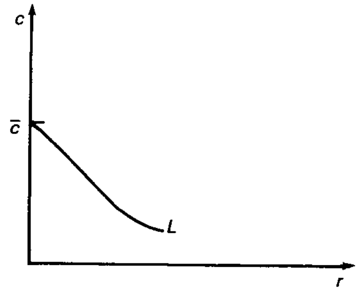
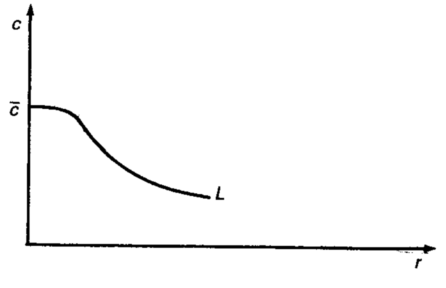


Figura 3c



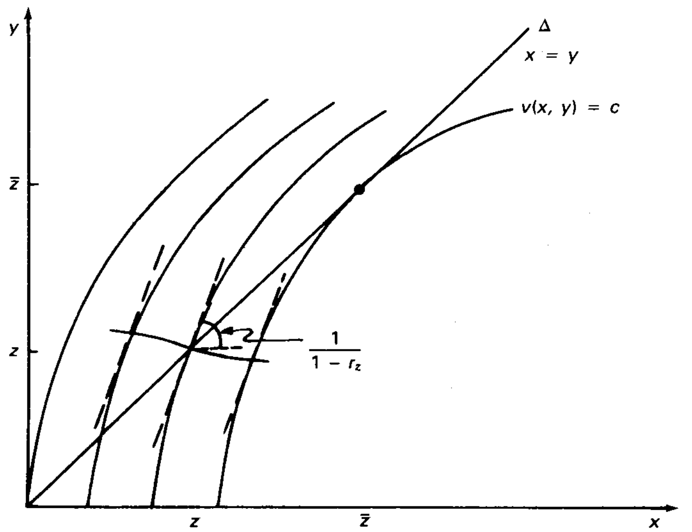
El Teorema de la Regla Dorada se prueba fácilmente. Debe maximizarse $v(z, z)$ sobre $z > 0$. La condición de primer orden para este problema es:

$$\nabla_x v(\bar{z}, \bar{z}) = - \nabla_y v(\bar{z}, \bar{z}).$$

Por tanto, $(\bar{z}, \bar{z})$ tiene una tasa de interés asociada igual a cero. La figura 4 proporciona una ilustración gráfica en el caso de $n = 1$.

Debemos subrayar que el Teorema de la Regla Dorada permanecería

Figura 4



válido si la función de tecnología v fuera meramente cuasicóncava (permitiendo, por tanto, cierto grado de retornos crecientes en la producción del bien de consumo). En efecto, sólo la convexidad de los conjuntos $\{(x', y'): v(x', y') \geq v(x, y)\}$ son significativos en la prueba. Sin embargo, ahora mostraremos que si la tecnología es de hecho cóncava, el Teorema de la Regla Dorada puede fortalecerse ligeramente. No sólo el consumo máximo se logra en $r = 0$; la pérdida de consumo por un incremento de primer orden en r (de $r = 0$) es de segundo orden. La parte más alta del lugar geométrico de L al cruzar el eje vertical debe ser plana. Por tanto, el lugar geométrico de la figura 3c es admisible, pero el de la figura 3b es inadmisible. Un examen de la figura 3b convencerá al lector de que ésta puede generarse de una v cuasicóncava, puesto que podemos asignar libremente valores de consumo a las isocuantas de la figura.

Formalmente dicha propiedad es:

Hecho: Supongamos que $\bar{c}$ es un consumo de la regla dorada. Si $r_m > 0$, $r_m \to 0$ y $(r_m, c_m) \in L$, entonces $(\bar{c} - c_m) / (r_m) \to 0$.

Prueba: Sean $\bar{z}$, z_m el acervo de capital asociado, respectivamente, con la regla dorada y con (r_m, c_m). Denotando $w(z) = v(z, z)$, entonces:

$$\nabla_z w(z_m) = \nabla_x v(z_m, z_m) + \nabla_y v(z_m, z_m) = r_m \nabla_x v(z_m, z_m).$$

Por concavidad,

$$\bar{c} = c_m = w(\bar{z}) - w(z_m) \leqslant \nabla_z w(z_m) \cdot (\bar{z} - z_m) = r_m \nabla_x w(z_m) \cdot (\bar{z} - z_m).$$

Por la estricta concavidad de $w(\cdot)$ tenemos $z_m \to z$. Por tanto,

$$\nabla_x w(z_m) \cdot (\bar{z} - z_m) \to 0$$

y debido a esto:

$$\frac{\bar{c} - c_m}{r_m} \to 0.$$

Observación técnica: Sospecho, aunque sólo lo he probado para el caso donde $n = 1$, que esta última característica puede fortalecerse:

Existe una función continua α: $(-\infty, c) \to R$ tal que:

i) $\alpha(c) \leq \gamma$ cuando $(r, c) \in L$; y

ii) $\int_{-\infty}^{-c} \frac{1}{\alpha(c)} dc < \infty.$

3. Proposición recíproca al Teorema de la Regla Dorada

La cuestión principal a discutir en esta sección es: dado el conjunto $L \subset [0, \infty) \times R$, ¿cuándo puede generarse L como el lugar geométrico de la tasa de interés de consumo de una tecnología v?

Siempre tomaremos L como un conjunto cerrado y acotado por arriba. Postulamos también que para algún $\bar{r} > 0$ no podemos tener $(r, c) \in L$, $r \geq \bar{r}$ y $c \geq 0$. Además, sólo nos interesa el consumo no negativo. Resumiendo: podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que L es un subconjunto cerrado de un rectángulo $[0, \bar{r}] \times [0, \bar{c}]$.

Sea $(0, c) \in L$ el punto donde se cumple la regla dorada. Sabemos, por la sección 2, que L debería cruzar el eje vertical perpendicularmente sólo en ese punto. Ésta será, esencialmente, la única restricción en L, y por tanto, la regla dorada (fortalecida) será el único teorema general de estática comparativa.

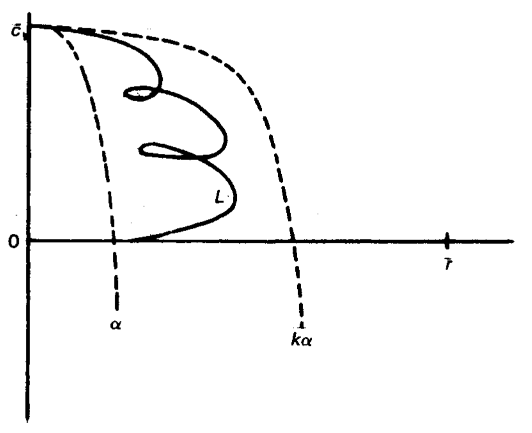
El término "esencialmente" del párrafo anterior es necesario porque impondremos, adicionalmente, una condición técnica débil, que controla el comportamiento local de L en $(0, \bar{c})$. Esta condición técnica (o, en su caso, la versión fuerte de la regla dorada) *no impone ninguna restricción en la forma de L sobre* $[0, \bar{r}] \times [0, \bar{c}]$.

Restricción de la Regla Dorada: Existe una función continua α: $(-\infty, \bar{c}] \to R$ con $\alpha(\bar{c}) = 0$ y $\alpha(c) > 0$ para $c < \bar{c}$ tal que:

i) para una constante $k > 0$, $\alpha(c) \leq r \leq k\alpha(c)$ cuando $(r, c) \in L$; y:

ii) $\int_{-\infty}^{\bar{c}} \frac{1}{\alpha(c)} dc < \infty$. Véase la figura 5.

Figura 5



Quisiera subrayar que, dando por hecho que la regla dorada se cumple, su restricción técnica es puramente local, i.e. depende sólo de L en la vecindad de $(0, \bar{c})$. La condición consta de dos partes: la primera afirma la existencia de una función continua α: $(-\infty, \bar{c}] \rightarrow R$ con $[1] / [\alpha(c)]$ que es integrable, tal que su gráfica deja L a su derecha. Como se indica en la observación técnica de la sección anterior, esto implica la perpendicularidad de L en $(0, \bar{c})$ y sólo es ligeramente más fuerte que esa propiedad. También puede ser una implicación necesaria de la concavidad de v (lo cual todavía no se resuelve). La segunda parte es que L está capturada entre las gráficas de α y $k\alpha$. Esto es necesario para nuestro método de prueba y podría ser violado por el lugar geométrico generado por una tecnología admisible. No obstante, esta parte de la condición es extremadamente débil. Su violación parece bastante patológica. En efecto, debemos ser capaces de encontrar $c_m \rightarrow \bar{c}$, (r_m, c_m), $(r'_m, c'_m) \in L$ pero con r_m, r'_m aproximándose a cero a diferentes tasas. En particular, si para c cerca de $\bar{c}$ podemos resolver únicamente para la tasa de interés $r(c)$, tal que $(r(c), c) \in L$, entonces se satisface automáticamente la segunda parte de esta condición.

Después de esta digresión técnica presentamos nuestro teorema principal.

Proposición: supongamos que $L \subset [0, \bar{r}] \times [0, \bar{c}]$ es un conjunto cerrado que satisface la restricción de la regla dorada. Entonces L puede ser generado por una función de tecnología admisible $v(x, y)$.

La prueba de esta proposición se hará en el siguiente apartado. Sólo son necesarios dos bienes de capital para esta tecnología.

Podría surgir la pregunta respecto a que si la construcción subyacente a cierto L es robusta en el sentido de que una pequeña perturbación de la producción (y productividades) de la tecnología generadora, cambiaría ligeramente L. Informalmente, la respuesta es que, en general, la construcción no puede ser robusta porque de lo contrario el conjunto L debe pertenecer a una 'clase genérica' formada por los conjuntos que son variedades* lisas unidimensionales. En términos menos técnicos, si la construcción es robusta, entonces L debería parecer, alrededor de cualquiera de sus puntos, como un pequeño segmento (curvo), i.e. como lo muestra la figura 6a y no como la 6b, donde no se cumple la condición de la variedad en ninguno de los tres puntos de intersección indicados. Por otro lado, en la siguiente sección observaremos, mientras llevamos a cabo la construcción clave de la prueba, que si el conjunto L con que empezamos es una variedad lisa unidimensional, entonces, de hecho, la construcción es robusta.

Figura 6a

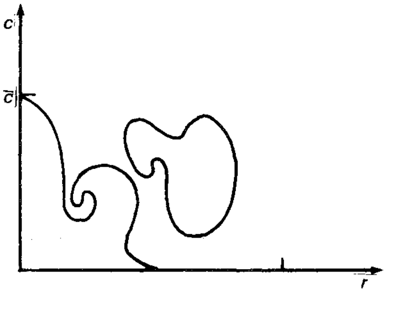
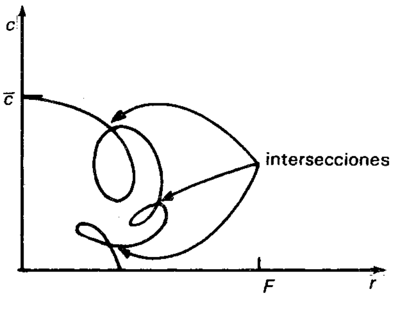


Figura 6b



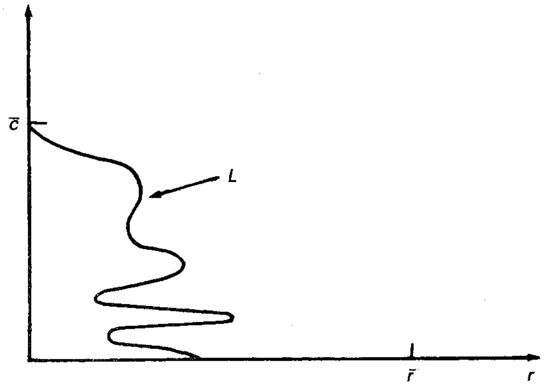
¿Qué se puede lograr si estamos limitados a un solo bien de capital? En realidad, la proposición permanece válida si a las restricciones de L agregamos que por cada $c \leq \bar{c}$ haya una r_c única con $(r_c, c) \in L$. Es obvio que esta restricción es necesaria, como se aprecia en la figura 4. Vemos que fijando c, en estado estable determinan a z únicamente y, por tanto, sólo puede haber como máximo una tasa de interés. Por otro lado, en el caso unidimensional, los precios a través de dos periodos siempre son proporcionales. De aquí que todos los estados estables z estén asociados a una tasa de

* Se tradujo la expresión *manifold* como variedad (N. del T.).

interés que es igual a uno menos el inverso de la pendiente hacia la isocuanta a través de z. Todavía refiriéndonos a la figura 4, la intuición básica de nuestra prueba, reducida al caso donde $n = 1$, consiste en observar que en el segmento $[0\ (\bar{z},\ \bar{z})]$ podemos asignar las pendientes, esencialmente, de manera libre. Además, hay un pequeño y delicado punto (que da cuenta del término "esencialmente"): la asignación de isocuantas a las pendientes debería ser compatible con el mapa de isocuantas que se genera de una función cóncava. Por ello se requiere la restricción más refinada de la regla dorada (i.e. la existencia de la función α).

Hemos postulado que el conjunto L en la figura 7 puede ser generado por un modelo de un solo bien de capital. Esto parece estar en conflicto con la afirmación convencional de que el caso de un solo bien de capital es bien comportado y obtiene como resultado un lugar geométrico monótono de la tasa de interés asociada al consumo. Sin embargo, no hay ninguna contradicción. Supongamos que en los mapas de isocuantas de $v(x, y)$ imponemos la siguiente condición de "normalidad": si las tasas marginales de transformación de x por y están fijas en cualquier valor arbitrario, entonces la curva unidimensional resultante se incrementa con el consumo; un nivel más alto de consumo es posible sólo si hay suficiente flujo de capital y menos requerimientos de capital en el siguiente periodo. Con esta condición, la asignación de las pendientes al estado estable es monótona (véase de nuevo la figura 4) y también lo será el conjunto L. Una condición suficiente para la propiedad de normalidad es que $v(x, y)$ tenga la forma "cuasilineal" $v(x, y) = f(x) - y$. En este caso, las isocuantas de v son generadas de una a otra por desplazamiento vertical. La forma $v(x, y) = f(x) - y$, i.e. que los bienes de consumo y de capital sean sustitutos perfectos, que es lo que usualmente se entiende como un solo bien de capital, y para éste, hemos visto que la afirmación de buen comportamiento no se sostiene.

Figura 7



4. Prueba de la proposición

La prueba consiste de seis pasos. Nos conformaremos con que la función $v(x, y)$ sea continua y cóncava. La función puede hacerse continuamente diferenciable y estrictamente cóncava si se agregan dos pasos más. Debido a que éstos son complicados y no muy interesantes, los dejaremos de lado.

La función de la tecnología $v(x, y)$ es construida en el paso 4 después de trabajo preliminar en los pasos 1 y 3. Los pasos 5 y 6 verifican que v tiene las características deseadas. El paso 1 construye v en un conjunto de estado estable $\Delta = \{(x, y) \in P \times P: x = y\}$. Los pasos 2 y 3 asocian a cada estado estable una función afín en R^4 que sostiene v sobre Δ. Entonces, el paso 4 extiende v a todo el conjunto $P \times P$ tomando el ínfimo de todas las funciones afines.

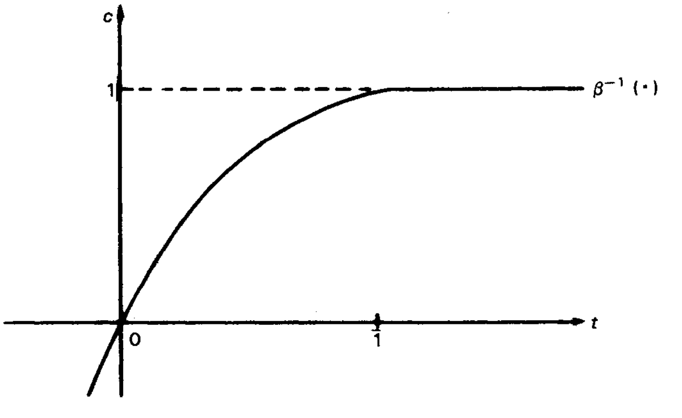
Sin pérdida de generalidad tomamos $\bar{c} = 1, \bar{r} = 1$.

Paso 1

Tomando $n = 2$.

Hay una considerable libertad para escoger la función de tecnología sobre el conjunto de estados estables $\Delta = \{(x, y) \in P \times P: x = y\}$. Seleccionamos uno que es particularmente conveniente para las siguientes construcciones.

Figura 8



Sea $\beta(-\infty, 1]$ una función arbitraria, continuamente diferenciable, que estrictamente se incrementa y es convexa, con:

i) $\beta(0) = 0$,
ii) $\beta(1) = $ i, y
iii) existe una constante $a > 0$ tal que: $\beta'(c) = \dfrac{a}{\alpha(c)}$.

Este tipo de función existe por la restricción de la regla dorada:

$$\int_{-\infty}^{\bar{c}} \frac{1}{\alpha(c)}\, dc < \infty.$$

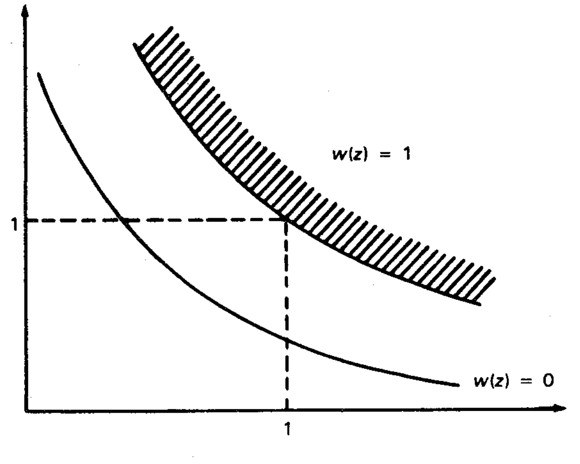
Suponiendo que $\beta^{-1}(t) = 1$ para $t > 1$, podemos observar que β^{-1} está definida como en $[0, \infty)$ (véase la figura 8).

Sea $e = (1, 1)$ y g: $R^2_+ \to R_+$ una función cóncava creciente con gradientes que no desapareeen y determinante Hessiano. Supongamos también que:

i) $g(e) = 1$,
ii) $g((2, 0)) < 0$, $g((0, 2)) < 0$, y
iii) existe una constante $b > 0$ tal que $\frac{1}{b} \| \nabla \partial g(z) \| \leqslant b$ para toda $z \geq 0$.

Finalmente, definimos w: $\Delta \to (-\infty, 1]$ para preservar la transformación, $w(z) = \beta^{-1}(g(z))$ (véase la figura 9).

Figura 9



Nótese que para $w(z) < 1$ tenemos que:

$$\nabla w(z) = \frac{a}{\beta'(w(z))} \nabla g(z) = \alpha(w(z)) \nabla g(z).$$

Por tanto,

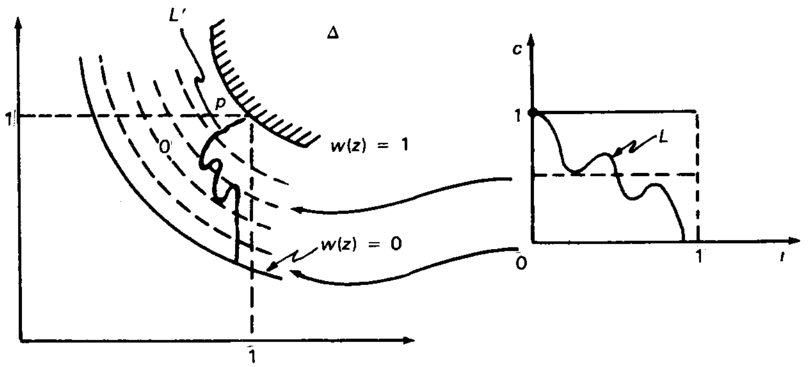
$$\frac{a}{b} \alpha(w(z)) \leqslant \| \nabla w(z) \| \leqslant ab\alpha(w(z)).$$

Paso 2

La tarea aquí es inyectar L en Δ, de tal manera que la inyección sea uno a uno (nótese que lo anterior no se podría hacer si Δ no fuera por lo menos de dos dimensiones); las secciones de isoconsumo de L se colocan en el mapa sobre sus curvas de isoconsumo de w correspondientes, véase la figura 10.

Parametrizando la región $Q = \{Z \in \Delta\colon z \leq e,\ w(z) \geq 0\}$ identificando todos los $z \in Q$ con $(w(z), \Theta(z))$, donde $\Theta(z)$ es el ángulo (en grados) del vector $z - e$. Obviamente $180 \leq \Theta(z) \leq 270$.

Figura 10



Para cualquier $(r, c) \in [0, 1]^2$ hay que asociar el punto $z(r, c) \in Q$ dado por $(c, 200 + 50r)$. Nótese que, efectivamente, $w(z(c, r)) = c$ y que la función $z(\cdot)$ está uno a uno en L. Denotamos L' como la imagen de L.

Paso 3

Ahora procedemos a asociar a todos los $z \in \Delta$, $0 \leq w(z) < 1$, una cierta función afín q_z en R^4 maximizando w en Δ. Sin embargo, primero necesitamos escoger dos funciones auxiliares cuya existencia sea una consecuencia de la cercanía de L'.

Sea r: $\Delta \rightarrow [0, 1]$ una función continua tal que:

i) $\alpha(w(z)) \leq r(z) \leq k\alpha(w(z))$ para cualquier $z \in \Delta$, y
ii) si $z \in L'$, entonces $r(z)$ es la tasa de interés correcta asociada con z, i.e., $z(r(z), w(z)) = z$.

Sea γ: $\Delta \rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ una función continua arbitraria y diferenciable tal que cuando $0 \leq w(x) \leq 1$, tenemos que $\gamma(z) = 0$ si y sólo si $z \in L'$. Adicionalmente, si L (y por lo tanto L') es unidimensional y lisa, entonces γ puede escogerse tal que $\nabla_z \gamma(z) \neq 0$ cuando $\gamma(z) = 0$. Éste es el requerimiento que garantiza que nuestra construcción sea robusta en el caso de que L sea una variedad lisa.

Finalmente, para cada z tal que $0 \leq w(z) < 1$, definimos q_z: $R^4 \rightarrow R$ por:

$$q_z(x, y) = b_z^x \cdot x + b_z^y \cdot y + d_z$$

donde:

$$b_z^x = \frac{1}{r(z)}\left([1 + \gamma(z)]\,\frac{\partial w}{\partial z_1}(z), \frac{\partial w}{\partial z_2}(z)\right) \gg 0$$

$$b_z^y = -\frac{1 - r(z)}{r(z)}\left(\left[1 + \frac{\gamma(z)}{1 - r(z)}\right]\frac{\partial w}{\partial z_1}(z), \frac{\partial w}{\partial z_2}(z)\right) \ll 0$$

$$d_z = w(z) - (b_z^x + b_z^y) \cdot z.$$

Nótese que $b_z^x + b_z^y = \nabla w(z)$ y $q_z(z, z) = w(z)$. Por tanto, si $x = y = v$, entonces tenemos que $q_z(v, v) = (b_z^x + b_z^y) \cdot v + d_z = \nabla w(z) \cdot (v - z) + w(z)$, i.e., en Δq_z coincide con el gradiente de w en z.

Los vectores b_z^x, b_z^y se han diseñado para ser proporcionales si y sólo si $z \in L'$, tal que $b_z^y = -(1 - r(z))b_z^x$.

Finalmente,

$$\|q_z\| = \|(b_z^x, b_z^y)\| \leqslant \frac{ab\alpha(w(z))}{r(z)} + (1 + \gamma(z))\,\frac{ab\alpha(w(z))}{r(z)} \leqslant 3ab$$

y:

$$\|q_z\| \geqslant \|\, b_x^z \,\| \geqslant \frac{1}{r(z)}\| \quad \nabla w(z) \,\| \geqslant \frac{a}{b}\,\frac{\alpha(w(z))}{r(z)} \geqslant \frac{a}{bk}.$$

Por tanto, el conjunto $\{\| q_z \|: 0 \leqslant w(z) < 1\}$ está acotado uniformemente por arriba y por abajo.

Paso 4

Definiendo la función de tecnología como v: $P \times P \rightarrow R$ por:

$$v(x, y) = \inf \{q_z(x, y): z \in \Delta, 0 \leqslant w(z) < 1\}.$$

Por construcción, v es cóncava, dada la propiedad de límite que se enunció al final de la sección anterior, $v(x, y) > -\infty$ para todos los (x, y) y, también porque todos los vectores subgradientes son no triviales y tienen componentes del signo correcto (débil). Además tenemos que $c(z, z) = w(z)$ en Δ.

Para concluir la prueba deberíamos mostrar, por tanto, que un estado estable (z, z) admite una tasa de interés de apoyo $r \geq 0$ y de consumo $c \geq 0$ si y sólo si $(r, c) \in L$. El paso 5 establece la condición suficiente y el paso 6 la condición necesaria.

Paso 5

La condición suficiente es trivial. Sean $(r, c) \in L$. Tomando $z = z(r, c) \in L'$, entonces $c = v(z(r, c))$ y, por construcción, q_z, de apoyo a $v(x, y)$ en (z, z) tiene:

$$b_z^y = -(1 - r(z))b_z^x = -(1 - r)b_z^x.$$

Paso 6

La condición necesaria es un poco más delicada. El factor clave es que para cualquier $0 \leq w(z) < 1$, la función $v(x, y)$ tiene q_z como el *único* gradiente en (z, z). Esto implica que si algún (z, z) con $1 > v(z, z) \geq 0$ admite una tasa de interés r, entonces esta r sólo puede venir de q_z, i.e. debemos tener $b_z^y = -(1 - r)b_z^x$. De aquí que $z \in L'$ (de otra manera b_z^x, b_z^y no son proporcionales) y por tanto $r = r(z)$, lo que resulta en $(r, v(z, z)) \in L$, que es la conclusión deseada. En cuanto a $c = 1$, puesto que $w(\cdot)$ tiene un valor máximo igual a uno, se sigue del Teorema de la Regla Dorada que $c = 1$ sólo puede estar asociado a la tasa de interés $r = 0$.

Por tanto, deberíamos comprobar que si $0 \leq w(z) < 1$, entonces q_z es la única función afín de apoyo a la función $v(x, y)$ en (z, z). Por contradicción, y suponiendo que hubiera otro p, tomamos $au \neq 0$ tal que:

$$p((z, z) + u) < q_z((z, z) + u),$$

puesto que $p(z, z) = q_z(z, z)$, que implica que $p(u) < q_z(u)$.

Por definición de v, hay una secuencia z_m tal que:

$$q_{z_m}\left((z, z) + \frac{1}{m} u\right) < v\left((z, z) + \frac{1}{m} u\right) + \frac{1}{2^m} \leqslant p\left((z, z) + \frac{1}{m} u\right)$$
$$+ \frac{1}{2^m} < q_z\left((z, z) + \frac{1}{m} u\right) + \frac{1}{2^m}.$$

Por la estricta convexidad de w en la vecindad de z y el límite de $\{q_z: 0 \leq w(x) < 1\}$, podemos encontrar δ_n tal que $\|z' - z\| > 1/n$; entonces $q_{z'}((z, z) + \epsilon v) > q_z((z, z) + \epsilon v) + \delta_n$ para $\epsilon < \delta_n$.

Combinando los últimos dos párrafos, concluimos que $z_m \to z$.

Reacomodando los términos y multiplicándolos por m, tenemos que:

$$m(q_{z_m}(z, z) - p(z, z)) + q_{z_m}(u) - p(u) \leqslant \frac{m}{2^m}.$$

La parte izquierda de la ecuación tiende a cero. El primer término de la parte derecha es no negativo porque $q_{z_m}(z, z) \geqslant q_z(z, z) = w(z) - p(z, z)$. Por tanto, $q_{z_m}(u) \to p(u)$. Sin embargo, $z_m \to z$ implica que $q_{zm} \to q_z$. Por tanto, $q_z(u) = p(u)$, lo que constituye la deseada contradición.

QED

Traducción: *Erik Seirsen*

Referencias

Arrow, K., y F. Hahn (1971). *General Competitive Analysis*, San Francisco, Holden-Day.

Bliss, C. (1975). *Capital Theory and the Distribution of Income*, Amsterdam, North-Holland.

Burmeister, E. (1980). *Capital Theory and Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Gale, D. (1973). "On the Theory of Interest", *American Mathematical Monthly*, 80: 8.

Harcourt, G. C. (1972). *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*, Cambridge, Cambridge University Press.

Malinvaud, E. (1953). "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources", *Econometrica*, 21.

Neumann, J. von (1945-1946). "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies*, 13.

Robinson, J. (1953-1954). "The Production Functions and the Theory of Capital", *Review of Economic Studies*, 21.

Shafer, W., y H. Sonnenschein (1982). "Market Demand and Excess Demand Func-

tions", en K. Arrow y M. Intriligator (eds.), *Hankdbook of Mathematical Economics*, vol. II, Amsterdam, North-Holland, cap. 14.
Weizsäcker, C. C. von (1971). *Steady State Capital Theory* (Nueva York, Springer-Verlag.