# ECONOMÍA DINÁMICA Y EL ENFOQUE RECURSIVO*

Germán Rojas A.
*Universidad Autónoma de Barcelona*

*Resumen:* Este trabajo presenta una revisión detallada del libro *Recursive Methods and Economic Dynamics* de Nancy L. Stokey y Robert E. Lucas (con Edward C. Prescott), Cambridge, Harvard University Press, 1989.

*Abstract:* This paper offers a detailed review of the book *Recursive Methods and Economic Dynamics* by Nancy L. Stokey and Robert E. Lucas (with Edward C. Prescott), Cambridge, Harvard University Press, 1989.

## 1. Introducción

La pregunta de cómo acercarse a la programación dinámica desde un enfoque económico moderno ha sido resuelta con la aparición del libro de Nancy L. Stokey y Robert E. Lucas (con Edward C. Prescott), *Recursivc Methods and Economic Dynamics*, Cambridge, Harvard University Press, 1989. El esfuerzo de estos autores ha permitido conjuntar bajo un solo enfoque las técnicas y herramientas utilizadas en la programación dinámica. Además de cubrir íntegramente los requisitos necesarios para construir firmemente los resultados de los métodos recursivos, los autores nos ofrecen un conjunto de aplicaciones que cubren gran parte del trabajo teórico desarrollado en los últimos 20 años en economía.

Junto con los libros de Sargent (1987) y de Kamien y Schwartz (1981), esta obra permite alcanzar un entendimiento profundo de las técnicas actualmente usadas para analizar problemas dinámicos, tanto en situaciones deterministas

*El autor agradece el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, de México, así como la hospitalidad del Managerial Economics and Decision Sciences Department de la Universidad de Northwestern, para la realización de este trabajo. También se agradecen los detallados comentarios de Alfredo Cuevas.

como estocásticas. Esto lo consiguen los autores dedicando gran parte del libro a desarrollar los elementos matemáticos básicos, desde los espacios vectoriales hasta la teoría de la medida.[1]

El libro está dividido en cuatro partes: la primera ofrece una introducción al enfoque determinista; la segunda estudia la dinámica determinista; la tercera se ocupa de la programación dinámica estocástica; y la última parte estudia el equilibrio competitivo. Pero antes de entrar en detalle, es conveniente que en la siguiente sección describamos el modelo clásico de crecimiento estocástico. De tal manera que a medida que reseñemos, en la sección 3, los elementos abordados por el libro, podamos motivar al lector a usar el modelo como ejemplo.

## 2. Un modelo de crecimiento estocástico

Breve y escuetamente, el modelo clásico de crecimiento estocástico puede describirse como sigue.[2] Imaginemos que tenemos una economía compuesta de un individuo que vive un número infinito de períodos, $t = 1, \ldots, \infty$. En esta economía los bienes se producen de acuerdo con la siguiente tecnología:

$$y_t = F(k_t, \theta_t). \tag{1}$$

La función de producción tiene todas las propiedades deseables: continuamente diferenciable, estrictamente creciente, homogénea de grado uno y estrictamente cóncava. En esta economía el bien $y_t$ se produce únicamente con capital. A cada tiempo $t$, por otro lado, el proceso productivo se ve afectado por un choque estocástico $\theta_t$ (pensemos, por ejemplo, que pueden haber buenas y malas temporadas de lluvia que afectan la cantidad final de producto), el cual es exógeno al consumidor.

En esta economía sólo se tiene que decidir en cada período sobre cuánto consumir y cuánto invertir. Así pues, la restricción presupuestaria es de la forma:

$$c_t + i_t \leq y_t, \tag{2}$$

en donde $c_t$ es consumo e $i_t$ inversión.

Supongamos que la inversión se integra al acervo de capital de acuerdo con la siguiente función de transición:

[1] Las referencias matemáticas obligadas en cuanto a espacios vectoriales y teoría de la medida son Royden (1968) y Halmos (1974).

[2] El capítulo 2 del libro hace una presentación completa del modelo de crecimiento así como del plan de la obra.

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t\,, \tag{3}$$

donde $\delta$, la tasa de depreciación del capital, cumple: $0 < \delta < 1$.

Sustituyendo (1) y (3) en (2) tenemos la siguiente restricción de factibilidad.[3]

$$c_t + k_{t+1} \leq F(k_t\,, \theta_t) + (1 - \delta)k_t. \tag{4}$$

El orden temporal en que se observan o se eligen las variables es muy importante en estos modelos. Aquí suponemos que en el período $t$ el conjunto de información es tal que el agente sabe la realización del choque estocástico $\theta_t$ y sabe, por tanto, de qué cantidad de producto dispone. Además, conoce toda la historia de las variables del sistema. Con esta información decide cuánto consumir y qué cantidad de capital habrá en el siguiente período. Por supuesto, el agente de esta economía se enfrenta a un problema de elección dinámico estocástico, ya que no conoce con certeza el valor futuro de $\theta_t$ y, en consecuencia, de $c_t$ y $k_{t+1}$.

Supongamos, para terminar de definir el problema, que el consumidor sólo considera el bien de consumo en su función de utilidad. Además supongamos que no hay "persistencia de hábitos", de tal forma que podemos expresar el valor esperado de la función de utilidad de la siguiente forma:[4]

$$E\,\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\}, \tag{5}$$

en donde $0 < \beta < 1$ es el factor de descuento. Supondremos que la función de utilidad tiene todas las propiedades para que el problema se comporte bien: es continua, acotada, continuamente diferenciable, estrictamente creciente y cóncava.

El problema de optimización al que se enfrenta este consumidor es por tanto el siguiente:

$$\text{Maximizar: } E\,\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a:} \quad & c_t + k_{t+1} \leq F(k_t\,, \theta_t) + (1 - \delta)k_t \\ & c_t > 0, \quad k_t > 0, \quad k_0 \text{ dado}, \\ & \theta_t \text{ sigue un proceso estocástico dado.} \end{aligned} \tag{A}$$

[3] En realidad, dados los supuestos sobre monotonicidad en las preferencias, esta restricción se cumplirá con igualdad.

[4] Es decir, la función de utilidad es aditivamente separable en el tiempo.

De esta forma, el consumidor eligirá una secuencia $\{c_t, k_{t+1}\}$ tal que maximice su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria. Podemos pensar, ya que hay incertidumbre respecto a los valores futuros de $\theta_t$, que esta secuencia de variables de decisión es contingente a la realización de $\theta_t$. Usando la restricción presupuestaria, uno puede sustituir $c_t$ en la función de utilidad, diferenciar con respecto al capital en el tiempo $t+1$ y obtener la condición de primer orden (o ecuación de Euler):

$$u'(c_t) = \beta\, E_t\{u'(c_{t+1})[F_{k,t+1} + (1-\delta)]\}, \tag{6}$$

en donde $u'$ es la derivada respecto al consumo. La intuición detrás de esta condición de equilibrio intertemporal es simple: la utilidad marginal de consumir una unidad menos del bien de consumo en el momento $t$ debe ser igual al valor esperado descontado de la utilidad marginal en el momento $t+1$ multiplicada por el ingreso generado por haber aumentado en una unidad el acervo de capital.

La ecuación (6), junto con la restricción presupuestaria y el proceso estocástico $\theta_t$, caracterizan las trayectorias de equilibrio del capital $\{k_t\}$.

La solución a este problema se puede plantear de una manera diferente. Imaginemos que estamos en el período $t=0$. Dados los supuestos sobre las preferencias y las restricciones tecnológicas y presupuestarias, al consumidor sólo le interesa saber con qué capital cuenta hoy, $k_0$, para poder elegir cuánto consumir, $c_0$, y cuánto capital dejar para mañana, $k_1$. Cuando llegue el mañana, $t=1$, él decidirá con base en $k_1$ cuánto consumir e invertir de nueva cuenta, y así sucesivamente.

Supongamos que en el período $t$ hemos resuelto el problema (A) para todos los valores posibles de $k_t$, dado un choque $\theta_t$. Entonces, definiendo la función del valor $v(k_t, \theta_t)$ como el valor optimizado de la función objetivo del período $t$ en adelante, se sigue que el problema (A) puede reescribirse como:

$$v(k_0, \theta_0) = \underset{k_1}{Max}\ \{u[F(k_0, \theta_0) + (1-\delta)k_0 - k_1] + \beta\, E[v(k_1, \theta_1)]\}, \tag{B}$$

donde hemos sustituido el valor de $c_0$ usando la restricción presupuestal.

Si suponemos que la función $v$ es diferenciable en $k$ y que el óptimo es interior, tenemos por tanto la siguiente condición de primer orden:

$$u'[F(k_0, \theta_0) - (1-\delta)k_0 - k_1] = \beta\, E\{v_1(k_1, \theta_1)\}. \tag{7}$$

Ahora, si además suponemos que la elección óptima del capital se hace de acuerdo a la función $k_{t+1} = h(k_t, \theta_t)$ ,esto implicaría, sustituyendo en (7), que:

$$u'[F(k_0, \theta_0) - (1-\delta)k_0 - h(k_1, \theta_1)] = \beta\, E\left\{v_1(h(k_0, \theta_0), \theta_1)\right\}. \tag{8}$$

Esta ecuación establece una relación entre las variables de estado $k_0$ y $\theta_0$, y el capital de mañana $k_1$. Por tanto, generalizando a cualquier tiempo $t$, podemos saber la trayectoria óptima del capital contingente a la realización de $\theta_t$. Es decir, podemos expresar los valores de $k_t$ así:

$$k_{t+1} = h(k_t, \theta_t). \tag{9}$$

El problema (B) es el típico ejemplo de programación dinámica. La función del valor, bajo ciertas condiciones de regularidad, se comporta muy bien: tiene solución única, para algunas condiciones iniciales podemos aproximar relativamente bien la solución, existe una función de política óptima única e invariante en el tiempo, etcétera.[5]

Numéricamente, el problema puede resolverse de dos formas: mediante la iteración sucesiva de la función del valor hasta su convergencia, o de la conjetura de una buena aproximación. En general, encontrar una solución implica un proceso largo de cómputo. Es incluso posible que se tengan que imponer restricciones para garantizar unicidad y convergencia.

En el ejemplo desarrollado aquí las funciones de política son ecuaciones en diferencia estocásticas que generan una secuencia de variables aleatorias (procesos de Markov). La forma análoga determinista de este problema implicaría resolver una ecuación en diferencia de primer orden. En este caso, se pueden establecer algunas propiedades de convergencia, una vez que imponemos ciertas restricciones; más aún, para una clase particular de problemas, podemos encontrar soluciones analíticas e indagar sobre sus puntos estacionarios, convergencia y propiedades de estabilidad.

Sin embargo, en el caso estocástico no tiene sentido hablar de convergencia puntual. Debido a que en cada período $t$ ocurre un choque, tenemos que hablar de otro tipo de convergencia. Evidentemente, las propiedades de convergencia dependerán de los supuestos que hagamos sobre el choque estocástico. Sin embargo, dada una ecuación diferencial estocástica y una función de distribución para el choque, podemos definir la función de transición:

$$\psi_{t+1}(a) = Pr\left\{k_{t+1} \le a\right\} = \int H(a, b)d\psi_t(b), \quad t = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

en donde $H(a, b) = Pr\left\{k_{t+1} \le a \mid k_t = b\right\}$, con $a, b > 0$.

[5] Véase Sargent (1987) y los capítulos 4 y 9 del libro que nos ocupa.

Bajo ciertas condiciones se cumple que la función de distribución es tal que converge a una función de distribución límite:

$$\psi(k') = \int H(k', k) d\psi(k). \tag{11}$$

Es decir, la función de distribución es invariante. Intuitivamente esto quiere decir que si una distribución describe la probabilidad con que ocurrirá $k_t$ en algún período $t$, entonces esta función también describe la distribución de probabilidad de $k$ en los subsecuentes períodos.

## 3. El contenido del libro

El planteamiento y desarrollo formal del ejemplo presentado en la sección anterior se trata con profundidad en el libro. Así, el capítulo 3 está dedicado a presentar algunos antecedentes matemáticos que permitan resolver un problema representativo de programación dinámica. Para analizar secuencias infinitas, funciones que resuelvan el problema de optimización, así como algunos resultados en convergencia, los autores hacen una revisión de espacios métricos, espacios vectoriales normados, teoremas de punto fijo (especialmente teoremas de contracción), las condiciones de Blackwell, y, finalmente, el teorema del máximo.

El capítulo 4 desarrolla las herramientas necesarias para resolver un problema dinámico no estocástico. En particular se prueba que la solución al problema (A) es la misma que la solución a (B); es decir, que el problema puesto en términos de secuencias infinitas es equivalente a la solución de la forma funcional. A este principio se le conoce como el "principio de optimalidad" (o principio de Bellman). El principio de optimalidad, así como los postulados de existencia y unicidad, es discutido por los autores en los casos en que la función de retorno es acotada, cuando hay rendimientos constantes a escala y cuando es arbitrariamente no acotada. Por último, también se aborda la relación entre el problema (A) y el cálculo de variaciones, mediante la demostración de que la ecuación de Euler y la condición de transversalidad son suficientes para caracterizar la solución al problema (A).

El capítulo 6 analiza las características de la programación dinámica en el caso determinista. Se examina brevemente la posibilidad de caos en modelos deterministas; se estudia el método de Liapunov para establecer estabilidad global y local; y, finalmente, se exponen los resultados sobre estabilidad desarrollados para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, así como su utilización con ecuaciones de Euler y algunos ejemplos.

La tercera parte del libro cubre la programación dinámica estocástica.

Aquí se usan los resultados obtenidos en el capítulo 4 y se hace una revisión de la teoría de la medida y de los procesos de Markov. El capítulo cubre algunos elementos básicos de teoría de la medida: espacios medibles, funciones medibles, integración de Lebesgue, etc. Todo esto con el fin de definir adecuadamente, y con una base firme, esperanzas (expectativas) condicionales.

En el capítulo 8 se desarrolla un método para incorporar procesos estocásticos exógenos a problemas de programación dinámica. El capítulo se dedica a definir los conceptos fundamentales: procesos estocásticos en general, y procesos de Markov en particular; el espacio donde se encuentran estos procesos; cómo definir medidas de probabilidad en estos espacios; y las propiedades de las funciones de transición. En el capítulo 9 se obtienen resultados formales sobre el principio de optimalidad; se estudian ecuaciones funcionales en los supuestos de funciones de retorno acotadas, con rendimientos constantes y no acotadas. También, se desarrollan las ecuaciones de Euler estocásticas, lo cual permite discutir el uso de éstas para caracterizar la estabilidad en modelos no lineales y también para ilustrar su uso empírico.

Uno de los aspectos más interesantes del libro es la ilustración de los aspectos formales. Esto se hace en dos capítulos de aplicaciones. El capítulo 5 ejemplifica el uso de la programación dinámica bajo certidumbre en el caso de temas que se han vuelto clásicos: el modelo de crecimiento de un sector, que sirve para actualizar el análisis de Ramsey, estudiado por Cass y Koopmans; los modelos bang-bang; los modelos sobre el mejor momento para "cortar un árbol"; los modelos de aprender-haciendo; los modelos de acumulación del capital humano; las decisiones de inversión de una empresa; los modelos con preferencias recursivas, y los modelos sobre el inventario óptimo. El capítulo se extiende en la ampliación de estos ejemplos, lo cual permite entender con profundidad las características y herramientas usadas en los capítulos anteriores, así como resaltar la importancia de los métodos recursivos.

El capítulo 10 se dedica a la presentación de ejemplos de programación dinámica estocástica. De nuevo se plantean y resuelven ejercicios tales como: modelos de crecimiento con uno y muchos bienes; inversión bajo incertidumbre; acumulación de inventarios; determinación de precios de activos en modelos financieros; modelos de búsqueda, y otros.

Los tres últimos capítulos de la tercera parte se dedican a analizar los teoremas y resultados sobre convergencia fuerte y débil de los procesos de Markov, así como algunas aplicaciones de convergencia aplicadas a los ejercicios presentados en el capítulo 10. El capítulo 14 hace una revisión de cómo algunos resultados empíricos nos permiten usar los métodos recursivos. En el ejemplo que hemos presentado, el consumidor es dueño de la única empresa existente en la economía. Es decir, estamos en una economía donde no hay intercambio y el consumidor decide cuánto consumir e invertir, contingente al estado de la naturaleza. En este sentido, el problema de optimización puede interpretarse como uno de planificación social. Obviamente, dado que sólo hay un individuo, las asignaciones resultantes son Pareto-óptimas.

Ahora imaginemos que además de un consumidor existe una empresa en la economía. Supongamos que la empresa sólo se dedica a alquilar los insumos existentes (capital y trabajo) y a producir el bien $y_t$, de tal forma que maximiza sus beneficios. El consumidor es dueño del capital y del trabajo, por lo que sólo se preocupa de maximizar el valor esperado del flujo de consumo. La pregunta pertinente es: ¿existen precios tales que las asignaciones obtenidas del problema de planificación social sean las mismas que las obtenidas en un equilibrio competitivo?

En el caso de modelos estáticos de equilibrio general competitivo, y bajo ciertas condiciones, sabemos que la respuesta a la pregunta anterior está dada por los dos teoremas fundamentales del bienestar: *i*) un equilibrio competitivo es un óptimo de Pareto, y *ii*) una asignación óptima paretiana tiene asociados precios y cantidades que constituyen un equilibrio competitivo.

En el caso dinámico estos dos teoremas también se cumplen bajo ciertas condiciones. Cuando ésto es cierto, entonces podemos hacer afirmaciones sobre el comportamiento del mercado resolviendo únicamente los problemas de planificación social. Hay muchos casos de interés, sin embargo, en que no se pueden establecer los teoremas del bienestar. Por ejemplo, si queremos analizar situaciones donde hay impuestos distorsionadores, individuos heterogéneos, externalidades o rendimientos crecientes ya no podemos aplicar los resultados mencionados.

Consideremos de nueva cuenta el modelo de crecimiento estocástico, pero ahora en el caso descentralizado. Es decir, ahora hay un consumidor que es dueño del capital y, por otra parte, existe una empresa que alquila capital para producir. Supongamos que los ingresos del capital están gravados a una tasa $\tau_t$, la cual es considerada exógena por el consumidor. La restricción intertemporal del consumidor es:

$$c_t + i_t = (1 - \tau_t) r_t k_t + T_t, \tag{12}$$

donde $r_t$ es la tasa de interés y la inversión se transforma en capital de acuerdo con (3). Suponemos que en esta economía el gobierno devuelve a los consumidores la recaudación fiscal por medio de una transferencia $T_t$. Observe que $\tau_t r_t k_t (\geq T_t)$ es la recaudación tributaria del gobierno.

La empresa sólo se dedica a alquilar los insumos y a producir óptimamente. Suponiendo rendimientos constantes a escala, la condición de primer orden es:

$$r_t = F_k(k_t^d, \theta_t), \tag{13}$$

en donde $k_t^d$ es la cantidad demandada de capital. En equilibrio $k_t = k_t^d$, por lo que sustituyendo en (13) tenemos $r_t = F_t(k_t, \theta_t)$.

De la misma forma que en el problema sin impuestos, podemos obtener la ecuación de Euler:

$$u'(c_t) = \beta E_t\{u'(c_{t+1})[r_{t+1}(1 - \tau_{t+1}) + (1 - \delta)]\}. \tag{14}$$

Sustituyendo $r_{t+1}$ tenemos:

$$u'(c_t) = \beta E_t\{u'(c_{t+1})[F_{k,t+1}(1 - \tau_{t+1}) + (1 - \delta)]\}. \tag{15}$$

La ecuación (15), junto con la restricción presupuestaria

$$c_t + k_{t+1} = (1 - \tau_t)F_{k,t}\, k_t + (1 - \delta)k_t + T_t\,, \tag{16}$$

y los procesos exógenos para $\theta_t$ y $\tau_t$,[6] caracterizan la trayectoria de equilibrio del capital en esta economía con impuestos distorsionadores.

Observe que, en este ejemplo sencillo, las asignaciones asociadas al equilibrio competitivo coinciden con el óptimo paretiano sólo si $\tau_t = 0$ para todo $t$. Así, cuando algún $\tau_t$ es diferente de cero ya no podemos garantizar que se cumple el primer teorema del bienestar. En la última parte del libro se analiza este tipo de problemas. Esto es, se dedica a examinar la relación entre las propiedades de los métodos recursivos desarrollada previamente y su relación con el equilibrio competitivo y la optimalidad paretiana. En el capítulo 15, además de una revisión de espacios duales, se postulan y prueban los dos teoremas fundamentales del bienestar. Manteniendo la línea de exposición, el capítulo 16 presenta algunos ejemplos sobre modelos de inversión y crecimiento (de uno y muchos sectores, con un agente representativo y con agentes heterogéneos) que permiten establecer claramente la relación entre las técnicas de programación dinámica estocástica y no estocástica y los problemas de diseñar políticas.

Los capítulos 17 y 18 se enfrentan a los problemas que surgen cuando no se aplican los teoremas del bienestar. En estas situaciones la optimalidad paretiana no se puede asegurar. El capítulo 17 presenta algunos teoremas de punto fijo que pueden ser útiles para establecer la existencia del equilibrio en

[6] Debido a la forma en que hemos modelado el comportamiento del gobierno, puede considerarse como un proceso estocástico que cumple con la restricción $\tau_t \in (0,1)$.

estos casos. A diferencia de los ejemplos presentados en el capítulo 17, en el 18 se desarrolla un modelo con impuestos distorsionadores, como el ejemplificado aquí, en donde las variables de estado son endógenas, y se caracterizan los resultados de existencia.

Si bien se trata con amplitud la teoría de la programación dinámica, así como la teoría moderna del equilibrio general dinámico, hay que señalar que en este libro se olvida un elemento crucial: el estudio de los métodos numéricos para calcular las asignaciones de equilibrio en un modelo económico. Así, la mayoría de los ejemplos que se presentan se pueden resolver analíticamente; sin embargo, hay una gran literatura que ha intentado resolver problemas más realistas y/o complicados, los cuales no tienen una solución analítica.

Para ejemplificar el caso de la existencia de una solución analítica, suponga que en el modelo de crecimiento estocástico que hemos presentado la función de utilidad es:

$$u(c_t) = ln(c_t) \tag{17}$$

y que la función de producción es Cobb-Douglas:

$$F(k_t, \theta_t) = k_t^{\alpha}\theta_t, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{18}$$

Suponiendo además que $\theta_t$ es un proceso aleatorio idéntica e independientemente distribuido, entonces, como el lector puede fácilmente verificar y como se verifica en el texto, la función de política puede expresarse de manera analítica.

Sin embargo, no todos los problemas son tan sencillos. En Hansen y Sargent (1990) se describe un procedimiento para calcular trayectorias de equilibrio cuando la estructura del problema presenta una función objetivo lineal, restricciones cuadráticas y donde el proceso estocástico se genera con un vector autorregresivo de primer orden. En esta clase de modelos el equilibrio puede representarse como un sistema en donde el vector de variables de estado se mueve de acuerdo a un vector de ecuaciones diferenciales estocásticas de primer orden.

En el trabajo de Hansen y Prescott (1990) se examinan algunos modelos que pueden resolverse cuando la estructura del problema es cuadrática-lineal. En particular, se presentan algunos algoritmos de solución para el modelo de crecimiento estocástico y algunas de sus extensiones; cuando, por ejemplo, el trabajo es indivisible, o cuando se requiere tiempo para construir. También presentan algoritmos para economías en donde no se cumple el segundo teorema del bienestar (en el caso, por ejemplo, de impuestos distorsionadores, restricciones de efectivo en avance, o economías heterogéneas).

Uno de los inconvenientes, de acuerdo con sus críticos, de usar estructuras lineales recursivas para encontrar las trayectorias de equilibrio es que la ley de movimiento resultante es lineal. La primera respuesta a esta crítica es que hay poca evidencia de que existan grandes no linealidades en las series de tiempo económicas.[7] La otra respuesta es que hay una gran variedad de métodos numéricos no lineales en experimentación para encontrar trayectorias de equilibrio en economías mucho más complejas.[8]

Para concluir, el libro de Stokey y Lucas (con Prescott) es una obra de referencia obligada para estudiantes e investigadores interesados en modelar la economía como un proceso en movimiento. Además de ofrecer una lectura llena de ejemplos, los autores no han olvidado en ningún momento la formalidad matemática necesaria para construir con seriedad una teoría moderna de la economía dinámica.

## Referencias


Boldrin, M., y M. Woodford (1990). "Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey", *Journal of Monetary Economics*, 25.

Haimos, P. R. (1974). *Measure Theory*, Nueva York, Springer-Verlag.

Hansen, G. D., y E. C. Prescott (1990). "Recursive Methods for Computing Equilibria of Business Cycle Models", manuscrito, Universidad de Minnesota.

Hansen, L. P., y T. J. Sargent (1990). *Recursive Linear Models of Dynamic Economies*, libro no publicado, Stanford, Hoover Institution.

Kamien, M. I., y N. L. Schwartz (1981). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Nueva York, North-Holland.

LeBaron, B. (1991). "Nonlinear Econometrics for Chaos: Empirical Results", manuscrito, Wisconsin, Universidad de Wisconsin.

Royden, H. L. (1968). *Real Analysis*, Nueva York, Macmillan.

Sargent, T. J. (1987). *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge, Harvard University Press.

Scheinkman, J. A. (1991). "Nonlinearities in Economic Data: Statistical Tools Related to Nonlinear Dynamics", manuscrito, Chicago, Universidad de Chicago.

Taylor, J. B., y H. Uhlig (1990). "Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, pp. 1-17.


[7] Véase LeBaron (1990) para una revisión exhaustiva de los resultados empíricos de la economía no lineal y del caos. Para una revisión de la teoría, véanse Boldrin y Woodford (1989) y Scheinkman (1990).

[8] Véase Taylor y Uhlig (1990), así como las referencias allí citadas, para una comparación de los métodos de solución que actualmente se están desarrollando.