UNA NOTA EXPOSITIVA SOBRE LA CONDICIÓN DE TRANSVERSALIDAD EN MODELOS ECONÓMICOS DINÁMICOS EN TIEMPO CONTINUO*

Marcelo Bianconi
Tufts University

Resumen: Esta es una nota expositiva sobre la condición de transversalidad en modelos económicos dinámicos de tiempo continuo. Ilustramos las cuestiones básicas usando el modelo de crecimiento neoclásico unisectorial de fijación de precios de activos. En esta clase de modelos la condición de transversalidad es el vínculo natural que une el presente con el futuro lejano.

Abstract: This is an expositional note on the transversality condition in continuous time dynamic economic models. We illustrate the basic issues, using the neoclassical one-sector optimal growth asset pricing model. In this class of models, the transversality condition is the natural link tying the present to the distant future.

1. Los diseñadores de modelos dinámicos han utilizado métodos de optimización dinámica en tiempo continuo en muchos campos de la economía y las finanzas, especialmente después de la contribución pionera de Ramsey (1928). En general, las aplicaciones se han centrado alrededor del siguiente problema de control óptimo:

$$Max \int_{t_0}^{T} v\,(x, u, t)\; dt + B\,[x\,(T), T] \tag{1}$$

* Agradezco a Peter Fortune sus útiles comentarios, así como los de dos dictaminadores anónimos. Este documento no contiene ningún resultado nuevo, es una nota expositiva sobre resultados existentes en la literatura. El nivel de la exposición es heurístico, intuitivo e introductorio. El lector interesado en exposiciones más rigurosas es remitido a las citas de referencia. Todos los errores son mi responsabilidad.

sujeto a

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

donde:

x= estado del sistema en el instante t,
u= control aplicado en el instante t,
B= función del valor del "legado" (el valor del estado en el instante T),
X_0= estado inicial en el instante t_0,
$\dot{x} = dx/dt =$ ley de movimiento del estado x.

El procedimiento usual para resolver problemas de esta naturaleza es establecer la función lagrangeana, L, como:

$$L(x, u, \lambda, t) = \int_{t_0}^{T} \{v(x, u, t) + \lambda\, [f(x, u, t) - \dot{x}\,]\}dt + B[x(T), T] \tag{4}$$

Integración de (4), por partes, resulta en:

$$L(x, u, \lambda, t) = \int_{t_0}^{T} \{\, v(x, u, t) + \lambda f(x, u, t) + \dot{\lambda} x\,\}dt$$
$$+ \lambda(t_0)\, x(t_0) - \lambda_T\, x_T + B\,[x(T), T] \tag{5}$$

Obsérvese que

$$\lambda f(x, u, t) + \dot{\lambda} x = \lambda \dot{x} + \dot{\lambda} x \tag{6}$$

donde el lado derecho es el cambio total en el valor del estado, en el instante t, cuando éste está valuado con el precio sombra λ. La función hamiltoniana se define como el integrando de la función lagrangeana menos las ganancias (o pérdidas) de capital, lo que resulta en:

$$H^*(\lambda, x, u, t) \equiv v + \lambda f \tag{7}$$

donde nuevamente λ es la variable de co-estado, o variable dual, y es interpretada como la valuación marginal del estado en el instante t. Las condiciones necesarias y suficientes para la solución de (1)-(3) involucran las derivadas parciales de la función hamiltoniana y de las ecuaciones de co-estado, ver Arrow y Kurz (1970), Brock y Malliaris (1989), Kamien y Schwartz (1991).

$$\dot{\lambda} = -H_x^* \tag{8}$$

$$\dot{x} = H_\lambda^* \tag{9}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{10}$$

junto con la condición de transversalidad

$$\lambda(T) = B_x(x, T) \tag{11}$$

donde esta última representa el valor marginal de x en $t = T$. Nuestro propósito en esta nota es dar una explicación intuitiva y heurística de la condición de transversalidad (11). Obsérvese primero que si $x(t) \geq 0$ para toda t y no hay legado en $t = T$, entonces $B = 0$, lo que significa que el valor de x en $t = T$ es cero. En este caso, (11) toma la forma:

$$\lambda(T)\, x(T) = 0 \tag{12}$$

la cual muestra que el estado en $t = T$, valuado por el precio sombra, es cero; alternativamente, nada del valor sobra en la fecha final. Romer (1989) interpreta (12) como una consecuencia del teorema de Kuhn-Tucker, el cual dada la restricción adicional $x(t) \geq 0$, requiere una condición complementaria de holgura en $t = T$. Uno también puede interpretar $\lambda\,(T)\,x\,(T)$ como una aproximación lineal posible al valor presente de $x\,(T)$. En el caso ampliamente usado en el que $T \rightarrow \infty$ (12) toma la forma:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda\,(T)\,x\,(T) = 0 \tag{13}$$

llamada condición de transversalidad en el infinito. Esta es una condición necesaria y suficiente para la optimalidad de una amplia clase de problemas, ver Benveniste y Scheinkman (1982). Aquí la interpretación en términos de Kuhn-Tucker es que la restricción de no negatividad debe cumplirse en el infinito y que (13) es la condición complementaria de holgura. Intuitivamente, la razón por la que debe de cumplirse (13) es que el futuro lejano es "insignificante", lo que quiere decir que uno supone que el valor de los "restos" $\lambda(T)\, x(T)$, sea cero en la senda óptima. Podría haber situaciones en donde el futuro distante fuera "significativo", en tales casos no hay razón para esperar que el valor de los "restos" sea forzado a cero a lo largo de una senda óptima. En este caso, la ecuación (13) no sería necesaria para la optimalidad, ver ejemplo Araujo y Scheinkman (1983).

2. También podemos examinar (1)-(3) en su forma de tiempo estacionaria, ver Brock (1987),

$$Max\int_{t_0}^{T} e^{-\delta t} v(x, u, t)dt + e^{-\delta T} B\,[x(T), T] \tag{14}$$

sujeto a

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{15}$$

$$x\,(t_0) = x_0 \tag{16}$$

donde

$\delta =$ tasa subjetiva de descuento, considerada constante.

En este caso, la función hamiltoniana es:

$$H(\lambda, x, u, t) \equiv e^{-\delta t} v(x, u, t) + e^{-\delta t} \lambda f \tag{17}$$

las ecuaciones de co-estado son:

$$\dot{\lambda} = \delta\,\lambda - H_x \tag{18}$$

$$\dot{X} = H_\lambda \tag{19}$$

$$x\,(t_0) = x_0 \tag{20}$$

y la condición de transversalidad es:

$$\lambda\,(T) = B_x(x) \tag{21}$$

y si $x(t) \geq 0$ y $B = 0$, entonces $e^{-\delta T} \lambda(T)\, x(T) = 0$.

Cuando $T \to \infty$, entonces (21) se convierte en

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\delta t}\, \lambda(t)\, x(t) = 0 \tag{22}$$

la cual es una condición necesaria y suficiente para que la solución de (14)-(15) sea óptima. Es esta condición la que determinará, en última instancia, la condición inicial $\lambda(0) = \lambda_0$. Y también requisito necesario y suficiente para que la solución de (18) sea óptima.

3. Los argumentos anteriores resuelven muchos problemas interesantes de inestabilidad en modelos económicos dinámicos. Esto es particularmente claro si vemos el modelo de crecimiento neoclásico unisectorial de fijación de precios de activos. En este modelo, la familia representativa resuelve:

$$\underset{c,\,z,\,k}{Max} \int_0^\infty e^{-\delta t}\, U(c)dt \tag{23}$$

sujeto a:

$$a\dot{z} + \dot{k} = rk + \pi z - c \tag{24}$$

$$z(0) = 1,\ z(t) \geq 0 \tag{25}$$

$$k(0) = k_0,\ k(t) \geq 0 \tag{26}$$

donde:

a = precio del activo
r = renta de capital
π = tasa de dividendos
z = cantidad (proporción) del activo perfectamente divisible
c = consumo
k = cantidad de capital
$U(.)$ = función de utilidad, $U'(.) > 0$ $U''(.) < 0$, $U'(0) = \infty$, $U'(\infty) = 0$.

En (23)-(26), la familia toma a, r, y π como paramétricamente dados. La empresa representativa renta capital de los consumidores a la tasa r para resolver:

$$\pi \equiv \max_k\, [f(k) - r\,k] \tag{27}$$

donde $f(k)$ es la función neoclásica de producción que satiface $f'(.) > 0$, $f''(.) < 0, f'(0) = \infty, f'(\infty) = 0$.

4. Para precisar el argumento de la condición de transversalidad, consideremos primero las ecuaciones (20)-(24) cuando no hay acumulación de capital, esto es $k = \dot{k} = 0$. En este caso, (23)-(26) resulta en:

$$\underset{c,\,z}{Max} \int_0^\infty e^{-\delta t}\, U(c)dt \tag{28}$$

sujeto a:

$$a\dot{z} = \pi z - c \tag{29}$$

$$z(0) = 1,\ z(t) \geq 0. \tag{30}$$

La función hamiltoniana se podría escribir como:

$$H \equiv e^{-\delta t}\, U(c) + e^{-\delta t}\, \lambda(t)\, (\pi z - c) \tag{31}$$

y las condiciones de primer orden son:

$$H_c \rightarrow \quad U'(c) = \lambda\,(t) \tag{32}$$

$$H_z \rightarrow \quad \lambda\,(t)\,\pi = \delta\lambda\,(t)a - \dot{\lambda}\,(t)a - \lambda\,(t)\dot{a} \tag{33}$$

las cuales junto con (29)-(30) determinan el equilibrio de previsión perfecta. Sin embargo, obsérvese que el equilibrio en el mercado de acciones implica $z = 1$, así:

$$\dot{z} = 0 \rightarrow \tilde{c} = \pi \rightarrow U'(\tilde{c}) = \tilde{\lambda} \rightarrow \dot{\lambda} = 0 \tag{34}$$

La ecuación (33) se simplifica como

$$\delta = (\pi/a) + (\dot{a}/a) \tag{35}$$

la cual establece que las ganancias de capital, $\dot{a}/a$, más los dividendos como una proporción del precio de los bonos, es igual a la tasa subjetiva de descuento, o el costo de retención de los activos. La ecuación (35) es una ecuación que elimina la posibilidad de arbitraje, en el sentido de que todas las oportunidades de beneficio están agotadas. Al integrar (35) sobre t obtenemos:

$$a\,(t) = e^{\delta t}\,[a(0) - \int_0^t \pi e^{-\delta t}\,ds]. \tag{36}$$

De acuerdo con (36), $a(0)$ podría (o no) exceder el valor descontado del flujo de dividendos, $\int_0^t \pi\, e^{-\delta t}\, ds$. A lo largo de la senda, las ganancias de capital son tales que el activo tiene un valor positivo (negativo) en t, para toda t. El precio de las acciones es infinito cuando $t \rightarrow \infty$. La condición necesaria y suficiente para (28)-(30) es la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t}\,\lambda(t)\,a(t)\,z(t) = 0 \tag{37}$$

Intuitivamente, si la ecuación (37) no es satisfecha, el consumidor podría pedir prestado indefinidamente, pagando el interés con préstamos adicionales (el esquema de Ponzi). Dada (34), la ecuación (37) se simplifica como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t}\,\tilde{\lambda}\,a\,(t) = 0 \tag{38}$$

la cual junto con (36) implica:

$$\tilde{\lambda}\,[a(0)-\int_0^{\infty}\pi\, e^{-\delta t}\,dt]=0 \tag{39}$$

la cual a su vez nos permite encontrar la condición endógena inicial ($\tilde{\lambda}=0$ es descartada por la condición de no-saciedad)

$$a(0)=\int_0^{\infty}\pi\, e^{-\delta t}\,dt. \tag{40}$$

Esto es, el precio del activo debe igualar el valor descontado del flujo de los dividendos, y esto elimina la inestabilidad dinámica del precio del activo. Otra manera de ver el papel que juega (37) es resolver (35), para obtener:

$$a(t)=(\pi/\delta)+A\, e^{\delta t} \tag{41}$$

donde A es una constante a determinar. Usualmente, la constante sería determinada por la condición *exógena* inicial. Sin embargo, para que haya estabilidad se requiere que la condición inicial sea *endógena* y determinada por (38). De hecho, (41) muestra que cuando $t\to\infty$, $a(t)\to\infty$; por lo tanto, al usar (38) y (41) obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{\lambda}\,[(\pi/\delta)e^{-\delta t}-A]=0 \tag{42}$$

lo cual implica que

$$A=0. \tag{43}$$

Por lo tanto (43) nos lleva a

$$a(0)=\pi/\delta \tag{44}$$

y (40) implica que

$$\int_0^{\infty}\pi\, e^{-\delta t}dt=\pi/\delta$$

esto es, el valor descontado del flujo de dividendos es la razón entre la tasa de dividendos y la tasa subjetiva de descuento (obsérvese que si $r=\delta=\pi$, (45) es sólo la unidad). Por lo tanto, (43), la cual elimina la posibilidad de inestabilidad del precio del activo, es consistente con la condición de transversalidad. De hecho, esto constituye una solución al problema de inestabilidad de "filo de navaja" de Hahn (1966).

5. Considérese el problema (23)-(27) con acumulación de capital, el cual ilustra con más detalle el problema de inestabilidad de filo de navaja. En este caso, el problema que enfrenta la familia involucra la función hamiltoniana

$$H \equiv e^{-\delta t}U(c) + e^{-\delta t}\,\lambda(t)\,(rk + \pi z - c). \tag{46}$$

Y las condiciones de primer orden son:

$$H_c \rightarrow \quad U'(c) = \lambda(t) \tag{47}$$

$$H_z \rightarrow \quad \lambda(t)\pi = \delta\lambda(t)a - \dot{\lambda}(t)a - \lambda(t)\dot{a} \tag{48}$$

$$H_k \rightarrow \quad \lambda(t)r = -\dot{\lambda}(t) + \delta\lambda(t)\ . \tag{49}$$

Las empresas rentan capital conforme a (27), lo que implica

$$f'(k) = r \tag{50}$$

y la dinámica del sistema puede ser expresada en términos de k y λ, usando $z = \tilde{z} = 1$, $\dot{z} = 0$, (24), (47), (49), (50):

$$k = f(x) - c\,(\lambda),\ c' < 0 \tag{51}$$

$$\dot{\lambda} = \lambda[\delta - f'(k)]\ . \tag{52}$$

El sistema diferencial (51)-(52) ilustra el problema de inestabilidad de filo de navaja. Para estudiar las propiedades del sistema, primero aproxímese linealmente alrededor del estado estable:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - \tilde{k} \\ \lambda - \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \tag{53}$$

donde

$a_{11} = f'(\tilde{k}) > 0$

$a_{12} = -c'(\tilde{\lambda}) > 0$

$a_{21} = -\lambda f''(\tilde{k}) > 0$

$a_{22} = \delta - f'(\tilde{k}) = 0$.

Las dos raíces propias de la matriz A son λ_1 , λ_2 , y su producto $\lambda_1\lambda_2 = -a_{12}a_{21} < 0$, lo cual indica que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$ (esto es, las raíces son reales con signo contrario). El sistema (53) tiene un comportamiento de punto de silla. En particular, podemos resolver (53) para obtener:

$$k(t) = \tilde{k} + A_1\, e^{\lambda 1 t} + A_2\, e^{\lambda 2 t} \tag{54}$$

$$\lambda(t) = \tilde{\lambda} + [(\lambda_1 - a_{11})/a_{12}]\, A_1\, e^{\lambda_1 t} + [a_{21}/(\lambda_2 - a_{22})]\, A_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (55)$$

donde A_1 y A_2 son las constantes a determinar. La variedad estable XX' está dada por:

$$[\, \lambda(t) - \tilde{\lambda}\,] = [(\lambda_1 - a_{11})/a_{12}]\,[\, k(t) - \tilde{k}\,] \qquad (56)$$

la cual tiene pendiente negativa y es consistente con $A_2 = 0$. Por otro lado, la variedad inestable, YY', es:

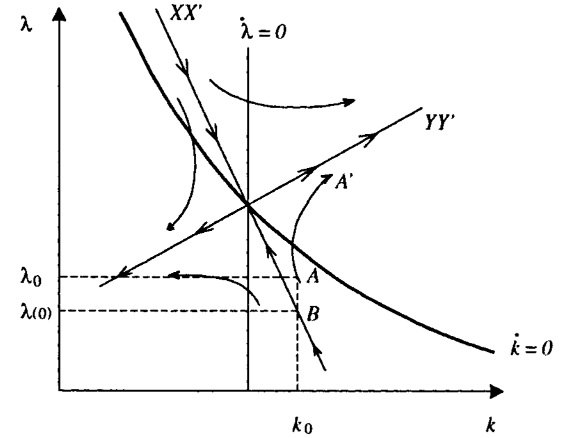
$$[\, \lambda(t) - \tilde{\lambda}\,] = [\, a_{21}/(\lambda_2 - a_{22})]\,[\, k(t) - \tilde{k}\,] \qquad (57)$$

la cual tiene pendiente positiva y es consistente con $A_1 = 0$. La figura 1 ilustra la dinámica. La condición inicial $k(0) = k_0$ está dada exógenamente. Ahora, supongamos que $\lambda(0) = \lambda_0$ también está dada *exógenamente* en el punto A de la figura 1. Es claro que el sistema seguiría la trayectoria inestable AA'. La solución es hacer que $\lambda(0)$ se determine *endógenamente* para que se satisfaga la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\delta t}\, \lambda(t)\, k(t) = 0. \qquad (58)$$

Figura 1

Comportamiento de punto de silla.
Problema de crecimiento neoclásico unisectorial.



Las constantes A_1 y A_2 son determinadas respectivamente por la condición exógena inicial y la condición de transversalidad. Ya que k_0 es exógena, $\lambda(O)$ debe ser una función de k_0 que ubique el punto inicial $[k_0, \lambda(0)]$ sobre la variedad estable XX'. De hecho, por (56) tenemos:

$$\lambda(0) = \tilde{\lambda} + [(\lambda_1 - a_{11}) / a_{12}] \, [\, k_0 - \tilde{k} \,] \tag{59}$$

la cual, dada k_0, sitúa al sistema en el punto B de la figura 1, asegurando la convergencia hacia el estado estable. Por lo tanto, la condición de transversalidad se cumple cuando $A_2 = 0$ en (54)-(55), lo cual elimina todas las trayectorias inestables como AA' y garantiza que, dada k_0, $\lambda(0)$ es tal que $k(t)$ y $\lambda(t)$ estén realmente en la variedad estable. Es así como el problema de inestabilidad de filo de navaja es resuelto.

6. Hay que destacar que el problema de acumulación de capital es resuelto independientemente del problema de fijación de precios de activos. En realidad, la solución para el modelo con acumulación de capital es la solución del modelo simple de crecimiento neoclásico unisectorial:

$$\underset{c,\,k}{Max} \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, U(c)dt \tag{60}$$

sujeto a

$$\dot{k} = f(k) - c \tag{61}$$

$$k(0) = k_0,\; k(t) \geq 0 \;. \tag{62}$$

El modelo (60)-(62) resuelve las trayectorias óptimas de $c\,[\,\lambda\,(t)\,]$ y $k(t)$. A lo largo de estas trayectorias el precio de equilibrio del activo, usando (27), (41), (45), (48), (49), es simplemente:

$$a(t) = \int_0^{\infty} e^{-\int_{\tau}^{t} \{\delta - [\,\dot{\lambda}(\tau) / \lambda(\tau)\,]\}\, d\tau} \, [\, f(k) - f'(k)k \,]\; dt. \tag{63}$$

Por lo tanto, la solución respecto a las variables reales en el modelo de crecimiento es independiente de la solución respecto a la valuación de los activos.

7. Hemos mostrado el papel de la condición de transversalidad en modelos económicos dinámicos en tiempo continuo. Mostramos, en particular, cómo ésta resuelve el problema de inestabilidad de filo de navaja de Hahn (1966). En cierto sentido, la solución radica en el hecho de que la condición de transversalidad establece un vínculo entre el estado actual y el futuro distante.

También, hemos mostrado que la solución del modelo de crecimiento neoclásico unisectorial de fijación de precios de activos se efectúa claramente en dos etapas: la solución de las cantidades reales dadas por el modelo simple de crecimiento óptimo y la valuación de los activos.

Referencias

Araujo, A., y J. A. Scheinkman (1983). "Maximum Principle and Transversahty Condition for Concave Infinite Horizon Economic Models", *Journal of Economic Theory*, vol. 30, pp. 1-16.
Arrow, K. J., y M. Kurz (1970). *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy. Resources for the Future*, Baltimore, John Hopkins University Press.
Benveniste, L., y J. Scheinkman (1982). "Duality Theory for Dynamic Optimizing Models of Economics: The Continuous Time Case", *Journal of Economic Theory*, vol. 27, pp. 1-19.
Brock, W. A. (1987). "Optimal Control and Economic Dynamics", en J. M. Eatwell y P. Newman (comps.), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, pp. 721-727.
———, y A. Malliaris (1989). *Differential Equations, Stability, and Chaos in Dynamic Economics*, Amsterdam, North-Holland.
Hahn, F. (1966). "Equilibrium Dynamics with Heterogeneous Capital Goods", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 80, pp. 633-646.
Kamien, M. I., y N. L. Schwartz (1991). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, segunda edición, Amsterdam, North-Holland.
Ramsey, F. (1928). "A Mathematical Theory of Savings", *Economic Journal*, vol. 38, pp. 543-559.
Romer, P. (1989). "Capital Accumulation in the Theory of Long-Run Growth", en R. J. Barro (comp.), *Modern Business Cycle Theory*, Cambridge, Harvard University Press, pp. 51-127.