LA TASA ÓPTIMA DE EXTRACCIÓN DE UN RECURSO NATURAL BAJO INCERTIDUMBRE

Raúl Aníbal Feliz*
Centro de Investigación y Docencia Económicas

Resumen: El objetivo de este breve ensayo es derivar la tasa de extracción óptima de un recurso natural por parte de una empresa monopolista bajo condiciones de incertidumbre sobre la evolución de sus reservas del recurso.

Abstract: The objective of this short paper is to derive the optimal rate of depletion of a non-renewable natural resource by a monopolist under uncertainty conditions on the evolution of the reserve stock of that natural resource

Introducción

Es conocido, por el lema de Hotelling, que bajo condiciones de certidumbre y con un horizonte infinito la tasa de extracción óptima es constante. Esta se fija a un nivel que hace que la tasa de variación del precio del recurso sea igual al factor de descuento de la firma.

En este ensayo se demuestra que este resultado puede extenderse al caso en que la evolución de las reservas del recurso son perturbadas por una variable aleatoria que sige un Movimiento Browniano. Sólo que en este caso el factor de descuento relevante es superior al anterior si la función de demanda del factor es inelástica respecto al precio y viceversa.

El ensayo se compone de tres breves secciones. En la primera y la segunda se deriva la tasa óptima de extracción bajo condiciones de certidumbre e incertidumbre respectivamente; y en la tercera, se resumen las principales conclusiones.

* El autor agradece las sugerencias y críticas recibidas de Ivan Araya y Alejandro Villagómez.

1. Extraccion óptima bajo certidumbre

Sea una firma que posee los derechos de explotación de un recurso natural. Cuyo acervo es R_t en el periodo t. Un programa de extracción $\{\theta_s\}_t^{\infty}$ de este recurso es factible si:

$$\int_t^{\infty} \theta_s ds = R_t \,. \tag{1}$$

La empresa, se supone, enfrenta la siguiente función inversa de demanda:

$$P_t = \alpha\theta_t^{-\gamma} \tag{2}$$

donde α es una constante y γ es el inverso de la elasticidad precio de la demanda.

En este contexto el problema de la empresa es maximizar la siguiente función objetivo:

$$\max_{\{\theta_t\}} \int_t^{\infty} e^{-\rho(s-t)} P_s \theta_s ds \tag{3}$$

en donde ρ es el factor de descuento. Esta expresión presupone que la firma produce con costos constantes.

La tasa de extracción óptima, que se obtiene directamente con los métodos tradicionales de optimización dinámica, es:

$$\theta_t = \frac{\rho}{\gamma} R_t \,. \tag{4}$$

Esta es una de las versiones del conocido lema de Hotelling. La tasa de extracción es constante y función lineal del factor de descuento.

En este modelo la condición de eficiencia intertemporal requiere que la tasa óptima de extracción sea tal que el precio del recurso aumente a una tasa igual al factor de descuento.

2. Extracción óptima bajo incertidumbre

Una característica no realista del modelo anterior es que supone que el acervo y la extracción del recurso natural declinan sistemáticamente a través del tiempo. Sin embargo la introducción de nuevas tecnologías y/o la ocurrencia de accidentes en el futuro alteran la cantidad efectiva del recurso natural.

Debido a lo anterior la firma no conoce con certidumbre la evolución futura del acervo del recurso. En este contexto se supone:

$$\int_t^{\infty} \theta_s ds = R_t + \int_t^{\infty} o R_s d\beta_s \tag{5}$$

donde o es una constante y β_t es una variable aleatoria que sigue un Movimiento Browniano.[1]

El objetivo de la empresa es maximizar el valor esperado de sus ingresos:

$$\max_{\{\theta_t\}} \int_t^{\infty} e^{-\rho(s-t)} E_t(P_s \theta_s) ds \tag{6}$$

sujeto a la restricción (5).

La solución de este problema, un caso especial del analizado por Glycopantis y Muir (1991), supone la elección de una tasa de extracción constante e invariante respecto al tiempo.

Por la anterior:

$$\theta_t = \lambda R_t \tag{7}$$

donde λ es por el momento un parámetro desconocido. Sustituyendo esta ecuación en la (5) y expresando ésta última en forma diferencial se obtiene:

$$dR_t = -\lambda R_t dt + \sigma_R R_t d\beta_t \,. \tag{8}$$

En esta ecuación $-\lambda R_t$ es el valor esperado de las variaciones de R_t y $\sigma^2 R_t^2$ es su variancia.

Aplicando las reglas del cálculo estocástico de Itô[2] se obtiene la siguiente solución para R_t:

$$R_t = R_0 \cdot e^{-(\lambda + \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\beta_t} \,.$$

[1] Entre las propiedades de β_t se encuentra: $(d\beta_t)^2 = dt$, $d\beta_t dt = 0$, $(dt)^2 = 0$.

[2] La ecuación (9) se obtiene haciendo $X_t = \log R_t$ y aplicando el lema de Itô que establece que:

$$dX_t = \frac{\partial X}{\partial R} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial X^2} dX dX$$

por la ecuación (8) esta expresión es:

$$dX_t = -(\lambda + \frac{1}{2} o_R^2) dt + o_R d\beta_t \,.$$

La integral de esta ecuación se obtiene directamente como:

$$X_t = X_0 + -(\lambda + \frac{1}{2} \sigma_R^2) t + \sigma_t \beta_t \,,$$

donde X_0 es $\log R_0$. El antilogaritmo de X_t es la integral de R_t.

Sustituyendo esta expresión en la función objetivo (6), utilizando la ecuación (2) y aplicando esperanza matemática[3] se obtiene la siguiente expresión:

$$\max_{\lambda} \alpha R_0^{1-\gamma} \lambda^{1-\gamma} \cdot \int_t^{\infty} e^{-\{\rho + \lambda(1-\gamma) - \frac{1}{2}\sigma_R^2 \gamma(1-\gamma)\}(s-t)} ds \tag{10}$$

que si $\rho - (1-\gamma)\lambda - (1-\gamma)\gamma o_R^2 > 0$ converge a:

$$\max_{\lambda} \frac{\alpha R_0^{1-\lambda} \lambda^{1-\gamma}}{\rho + \lambda(1-\gamma) - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)o^2} \,. \tag{11}$$

La solución del problema (11), uno clásico de optimización respecto a una variable, se alcanza cuando:

$$\lambda = \frac{\rho}{\gamma} - \frac{1}{2}\sigma^2(1-\gamma) \,. \tag{12}$$

Sustituyendo por esta λ en la ecuación (9) se obtiene la trayectoria óptima del acervo del recurso natural:

$$R_t = R_0 \cdot e^{-\{\frac{\rho}{\gamma} - \frac{1}{2}\sigma^2(1-\gamma)\}t + \sigma\beta_t} \tag{13}$$

Nótese que la tasa de extracción óptima es similar a la obtenida en la sección anterior cuando se utiliza el siguiente factor de descuento:

$$\bar{\rho} = \rho - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)o^2 \,. \tag{14}$$

Cuando la función de demanda sea elástica/inelástica respecto al precio del recurso la tasa de extracción es una función negativa/positiva de la variancia de dR_t.

Si la elasticidad precio es uno, la tasa óptima de extracción es independiente de la incertidumbre respecto a la evolución futura de las reservas.

[3] Para obtener esta expresión se hace uso del siguiente resultado:

$$E(e^{b\beta_t}) = e^{\frac{1}{2}b^2 t} \,,$$

donde b es cualquier parámetro.

3. Conclusiones

En este ensayo se deriva la tasa óptima de extracción de un recurso natural por una empresa monopolista.

Cuando la empresa opera bajo condiciones de certidumbre su tasa óptima de extracción es constante. En este caso el precio del recurso aumenta a una tasa igual al factor de descuento.

Este resultado se extiende directamente al caso en donde la evolución de las reservas del recurso es perturbada por una variable estocástica que sigue un Movimiento Browniano. Sólo que en este caso el factor de descuento relevante supera al anterior si la función de demanda del recurso es inelástica respecto a su precio y viceversa.

Referencias

Davis, M. H. A. (1977). *Linear Estimation and Stochastic Control*, Halsted Press Book.
Dixit, A. K. (976). *The Theory of Equilibrium Growth*, Oxford University Press.
Farrow, S. (1985). "Testing the Efficiency of Extraction from a Stock Resource", *Journal of Political Economy*, vol. 93, pp. 452-487.
Glycopantis, D., y A. Muir (1991). "On the Solution of a Stochastic Optimal Growth Model ", *Journal of Economics*, vol. 54, pp. 125-142.