¿CUÁNDO LA VIABILIDAD IMPLICA LA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE UN SISTEMA DINÁMICO LINEAL EN TIEMPO DISCRETO?

José Ramón Guzmán
Martín Puchet A.
Ciencias Económicas, UACPyP, UNAM

Resumen: Este artículo presenta algunos resultados de la teoría matemática del control, y los complementa con aquellos relativos a la viabilidad de sistemas dinámicos lineales en tiempo discreto. La selección se hizo para establecer qué condiciones deben cumplir tales sistemas para que su viabilidad implique su estabilidad estructural.

Abstract This paper presents some findings of the theory of control mathematics. These findings are complemented with those referred to viability of lineal dynamic systems on a discrete time-period. The purpose of the paper is to establish which conditions should be satisfied by those systems for their viability with structural stability.

La representación de un modelo económico como sistema dinámico lineal exige que éste posea condiciones de estabilidad estructural y de controlabilidad, pero sobre todo de viabilidad. Esta condición suele ser innecesaria en otras disciplinas, pero en economía la negatividad de las variables de estado del sistema, por lo general, no es admisible.

El objetivo principal de este artículo es vincular la interrogante acerca de la viabilidad de un sistema dinámico lineal en tiempo discreto con la pregunta sobre su estabilidad estructural. En términos económicos, un sistema cuyas salidas no sean viables y de cuyos parámetros no sea posible determinar, de manera conjunta con la viabilidad, sus condiciones de estabilidad estructural no será, en principio, una representación adecuada del funcionamiento normal de una economía.

Las respuestas a ambas preguntas se pueden dar mediante la simulación numérica de los modelos especificados y cuantificados. Sin embargo, cuando se trata de modelos anidados en marcos descriptivos de contabilidad social y cuya especificación se basa en la dinámica del control por normas, o en aquella macro y multisectorial, es imporante explorar posibles respuestas cualitativas.[1] Ello proviene del hecho de que la información contable y teórica sobre los parámetros de los modelos es más amplia y robusta que en otros casos. Y, por lo tanto, las características de signo y de magnitud de las matrices de parámetros son conocidas.[2]

El artículo está dividido en dos partes. La primera contiene las definiciones de las estabilidades de Lyapounov, asintótica, estructural, de viabilidad, y presenta los teoremas principales. La segunda parte plantea algunos teoremas de matrices no negativas que sirven para demostrar las afirmaciones finales que dan las condiciones que debe satisfacer un sistema para ser viable, y, de manera consecuente, inestable en el sentido de Lyapounov, sin que sus raíces características sean unitarias y, por lo tanto, estructuralmente estable.

1. Resultados de la teoría matemática del control

A continuación se presenta la notación que se seguirá en este trabajo y luego se dan las definiciones y se demuestran los teoremas que fundamentarán el argumento de la segunda parte. Los teoremas sobre estabilidad se encuentran en Barnet y Cameron (1985) y en Casti (1977). Por su parte, aquellos relativos a la viabilidad están en Tkayama (1986) y en Solow y Samuelson (1959).

[1] Los marcos descriptivos aludidos son aquellos de la contabilidad social de Pyatt y Round (1985), la dinámica del control por normas es la definida por Kornai, en Kornai y Martos (eds.), 1982, y aquella de tipo macro y multisectorial es la que utilizan Goodwin y Punzo (1987).

[2] Algunas relaciones entre estabilidad y viabilidad dentro del enfoque de Kornai y Martos fueron investigadas en Martos (1990).

1.1. *Notación*

$\mathbf{R}^n$ es el espacio vectorial euclidiano de dimensión n.
$M_{n\times m}(F)$ es el espacio de matrices de $n \times m$ sobre el campo F.
F es $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$.
Si $A \in M_{n\times m}(F)$, A^T es la matriz transpuesta de A.
Si $A \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$, $A > 0$ si cada entrada de A es mayor que 0.
$||\cdot||$ es una función que satisface las propiedades de una norma.
$\sup_{x\in U}$ es el supremo de un conjunto U.
El siguiente es un esquema de funciones:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \mathbf{R}^n \arrow[d, "j"] \\ \mathbf{R}^n \arrow[r, "k"'] & \mathbf{R}^n \end{tikzcd} \quad \text{conmuta si } j\circ f = k\circ h$$

$(a^2 + b^2)^{1/2}$ es el módulo del número complejo: $a + bi$.

1.2. *Teoremas de estabilidad y viabilidad*

El sistema a considerar es:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Fx_t + G\mu_t \quad \text{(a)} \\ y_t &= Hx_t \qquad\quad\ \text{(b)} \end{aligned} \tag{1}$$

donde F, G y H son matrices $n \times n$, $n \times m$ y $r \times n$, respectivamente, y $x \in \mathbf{R}^n$, $\mu \in \mathbf{R}^m$ y $y \in \mathbf{R}^r$.

Las definiciones y teoremas que se escriben a continuación contienen los elementos principales para vincular viabilidad con estabilidad.

DEFINICIÓN 1. En el sistema (1) con $G = 0$ y $H = 1$, la solución x_e es *estable en el sentido de Lyapounov* si para todo ε positivo existe un δ, también positivo, tal que:

$$||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||x(t) - x_e|| < \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_0$.

DEFINICIÓN 1'. La solución x_e es *asintóticamente estable* si:

1) es estable,

2) $\lim_{t \to \infty} x_t(x_0) = x_e$,

TEOREMA 1. *La solución de equilibrio x_e de $x_{t+1} = Fx_t$ es asintóticamente estable si los valores propios de F son en módulo menores que uno.*

PRUEBA. Sabemos por el teorema de Jordan que para cualquier matriz F existe una base de $\mathbf{R}^n$ tal que:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0, & \dots & 0 \\ 0 & J_2, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix}$$

con

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix},$$

Además

$$J_k^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & \binom{t}{1}\lambda^{t-1} & \dots & \binom{t}{k-1}\lambda^{t-k+1} \\ 0 & \lambda_t & \dots & \binom{t}{k-2}\lambda^{t-k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^t \end{bmatrix},$$

y como: $J^t = Q^{-1}F^TQ$, se tiene que: $F^t = QJ^tQ^{-1}$.

Entonces al calcular el límite:

$$\lim_{t \to \infty} (F^t) = Q \lim_{t \to \infty} J^t Q^{-1} = 0,$$

pues

$$\lim_{t \to \infty} J^t = 0,$$

ya que $|\lambda| < 1$. ■

DEFINICIÓN 2. Un punto fijo x del sistema: $x_{t+1} = Fx_t$ es *hiperbólico* si F tiene valores propios con módulo distinto de 1.

DEFINICIÓN 2'. f y g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ son *topológicamente conjugadas* si existe un homeomorfismo h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^n \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathbf{R}^n & \xrightarrow[g]{} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

DEFINICIÓN 2''. La norma de $f: U \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de donde se obtiene la topología C^1 está dada por

$$\sup_{x \in U} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| + \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| \right\}$$

DEFINICIÓN 2'''. $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ es *estructuralmente estable* si existe $\varepsilon < 0$ tal que la vecindad de $f: N_\varepsilon(f) = \{g : ||f - g||_1 < \varepsilon\}$ está formada por funciones topológicamente conjugadas con f.

El teorema principal de estabilidad estructural es el siguiente:

TEOREMA 2. *El sistema (1) es estructuralmente estable si es hiperbólico.*

PRUEBA. Sea otra vez el sistema lineal: $x_{t+1} = Fx_t$ y $x_t \in \mathbf{R}^n$. Se supone sin pérdida de generalidad que F es diagonalizable, que sus valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son reales y distintos, y que son tales que $|\lambda_i| \neq 1$, pues, por hipótesis, el sistema es hiperbólico. De esta forma la matriz F, salvo por un cambio de coordenadas, es equivalente a diag$\{\lambda_i, \ldots, \lambda_n\}$.

Se supone también que las perturbaciones que admite el sistema son lineales; es decir, son matrices P que, otra vez por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se suponen diagonalizables con valores propios reales equivalentes a diag$\{\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n\}$. Si $|\lambda_i| < 1$ las perturbaciones permitidas deben ser tales que: $\varepsilon_i < \inf(\lambda_i + 1, 1 - \lambda_i)$. Entonces, eligiendo ε tal que:

$$\left\| \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \ldots, & 0 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & \lambda_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \varepsilon_2, & \ldots, & 0 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & \varepsilon_n \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon,$$

(es decir $(\varepsilon_1 - \lambda_1)^2 + \ldots + (\varepsilon_n - \lambda_n)^2 < \varepsilon$ porque se ha tomado la norma euclidiana de las matrices), el sistema es estructuralmente estable. ■

Ejemplo. El sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t \\ y_{t+1} &= -x_t \end{aligned} ,$$

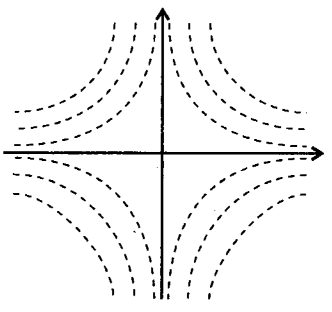
es estructuralmente inestable.

Comentario. Este sistema modela un oscilador armónico. Se esperaría que sistemas que provienen de fenómenos naturales fueran estructuralmente estables, pero este ejemplo muestra que no es el caso. El mismo par de ecuaciones tiene aplicaciones a las teorías del *tâtonnement* walrasiano y de los ciclos macroeconómicos goodwinianos. De ahí también su importancia en economía.[3]

PRUEBA. El sistema tiene el siguiente retrato de fase

[3] Véanse al respecto: Mas-Collel (1986), y Goodwin y Punzo (1987).

Figura 1



Sin embargo, cualquier perturbación $\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, con $\delta < 0$ muy pequeña resulta en:

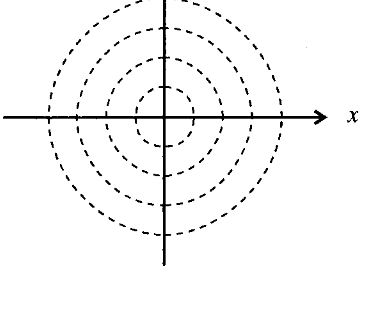
$$\left\| \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta, & 0 \\ 0, & \delta \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\delta, & 1 \\ -1, & -\delta \end{pmatrix} \right\|$$
$$= 2\delta^2 + 2 = 2(\delta^2 + 1) < 2(\delta + 1) = \varepsilon,$$

y, así, ε es muy pequeña. Pero, el sistema perturbado es:

$$x_{t+1} = y_t + \delta x_t$$
$$y_{t+1} = -x_t + \delta y_t$$

que tiene retrato de fase:

Figura 2



Como se ve, éste no es topológicamente conjugado con el que muestra la figura 1.

DEFINICIÓN 3. El sistema (1) es *viable* si para cualquier condición inicial $x_0 > 0$ se tiene $x_t > 0$, para cualquier t positivo.

DEFINICIÓN 3'. El sistema (1) tiene una solución de *crecimiento balanceado* si F posee un valor característico $\lambda > 0$ y el vector característico asociado es tal que $\bar{x} > 0$.

DEFINICIÓN 3''. El sistema (1) es *relativamente estable* si:

1) posee una solución de crecimiento balanceado: $x_t^* = \lambda^t \bar{x}$

2) existe $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{x_{it}}{x_{it}^*} = \sigma > 0$, siendo x_{it} los componentes del vector x_t y x_{it}^* los componentes de x_t^*.

TEOREMA 3. El sistema (1) es viable si es relativamente estable.

PRUEBA. Como el sistema (1) es relativamente estable se tiene que para todo ε positivo, hay un t mayor que T que cumple que

$$|x_{it} - \sigma\lambda^t \bar{x}_i| < \varepsilon$$

y, a su vez, si ε es arbitrariamente pequeña, se tiene que:

$$-\varepsilon + o\lambda^t \bar{x}_i < x_{it} < \varepsilon + o\lambda^t \bar{x}_i,$$

y como $\lambda > 0$, $\sigma > 0$, $\bar{x}_i > 0$, se sigue que $x_{it} > 0$, de donde resulta que el sistema es viable. ■

Comentarios. 1) El teorema anterior hace depender la viabilidad de la estabilidad relativa. Este hecho es relevante en la medida que asegura la significación económica de las trayectorias de las variables recurriendo al crecimiento balanceado de las mismas. Es decir, si el sistema muestra trayectorias que mantienen cierta proporcionalidad positiva respecto a la trayectoria de crecimiento balanceado se concluye su viabilidad. 2) Para que la viabilidad asegure la estabilidad estructural requiere que aquella cumpla condiciones más restrictivas que las provenientes de la estabilidad relativa. Éstas se establecen partiendo del siguiente lema que se aplica luego a un sistema que lo satisface.

LEMA (Tsukui). *Sea $F = (I + F_1)$ una matriz de $n \times n$ donde F_1 es no singular y $F_1^{-1} > 0$. Entonces $F^m > 0$ para un entero positivo m si y sólo si existe un valor propio λ_1 de F tal que $\lambda_1 > |\lambda_i|$, donde λ_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ son los otros valores propios de F.*

PRUEBA. ($\Leftarrow$) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de $I + F_1$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ los valores propios de $(I + F_1)^m$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ los valores propios de F_1^{-1}, $x^1, x^2, \ldots, x^n$ los vectores propios correspondientes de $I + F_1$, $y^1, y^2, \ldots, y^n$ los vectores propios correspondientes de $(I + F_1)^m$ y $z^1, z^2, \ldots, z^n$ los vectores propios correspondientes de F_1^{-1}. Es decir:

$$(I + F_1)x^i = \lambda_i x^i, \quad (I + F_1)^m y^i = \mu_i y^i, \quad (F_1^{-1})z^i = \nu_i z^i,$$

pero

$$(I + F_1)^m x^i = \lambda_i^m x^i, \quad \text{y} \quad (F_1^{-1})z^i = \nu_i z^i$$

$$\Rightarrow F_1 z^i = (\frac{1}{\nu_i})z^i \Rightarrow (I + F_1)z^i = (1 + \frac{1}{\nu_i})z^i.$$

De modo que $\lambda_i^m = \mu_i$, $1 + \dfrac{1}{\nu_i} = \lambda_i$, $x^i = y^i = z^i$, para todo i.

($\Rightarrow$) Supóngase ahora que $F^m > 0$ o $(I + F_i)^m > 0$ para algún entero $m > 0$, entonces F^m, por el teorema de Frobenius,[4] existe un raíz de Frobenius de $I + F^m$, μ_1, tal que: $\mu_1 > |\mu_i|$ $(i = 2, \ldots, n)$ y $y_1 > 0$ es un vector propio asociado con μ_1. Esto implica que $\lambda_1 > |\lambda_i|$ $(i = 2, \ldots, n)$ y $x_i > 0$, de manera que $\lambda_1^m = \mu_1$ y $x^1 = y^1$.

[4] Este teorema dice: Sea $A \geq 0$ una matriz no negativa. Entonces: *i)* A tiene un valor propio $\bar{\lambda} > 0$, *ii)* con $\bar{\lambda}$ se puede asociar un vector propio no negativo, *iii)* si $Ax \geq \mu x$, $\mu \geq 0$ y $x \geq 0$ entonces: $\bar{\lambda} \geq \mu$, *iv)* si w es cualquier valor propio de A, entonces $\bar{\lambda} \geq |w|$, y *v)* si $A_1 \geq A_2 \geq 0$ entonces $\bar{\lambda}_{A1} \geq \bar{\lambda}_{A2}$. Para la prueba ver Takayama (1986).

También supóngase que ν_1 es la raíz de Frobenius de $F_1^{-1} > 0$, de manera que: $F_1^{-1}x_1 = \nu_1 x_1$ y entonces: $\lambda_1 = 1 + \frac{1}{\nu_i} > 0$. Como la transpuesta de F_1^{-1} tiene los mismos valores propios, se tiene que:

$$\nu_1 u_1^T = u_1^T (F_1^{-1})^T \Rightarrow F_1 u_1 = \frac{1}{\nu_1} u_1$$

y además $u_1 > 0$ ya que $F_1^{-1} > 0$. Si se hace el producto escalar del vector dominante de $(F_1^{-1})^T, u^1$ por cualquier vector característico de $(I + F)$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\lambda_i(u^{1T}x^i) = u^{1T}(\lambda_i x^i) = u^{1T}(I+F)x^i = [u^{1T}(1 + \frac{1}{\nu_1})]x^i = (1 + \frac{1}{\nu_1})(u^i x^i)$$

Pero dado que

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{\nu_1} \text{ y } \lambda_1 > |\lambda_i|, \quad i = 2, \ldots, n,$$

la única forma de que se satisfaga la igualdad precedente cuando no se trata del valor característico dominante es que:

$$u^{1T}x^i = 0, \text{ para } i = 2, \ldots, n.$$

Sea ahora la base canónica usual $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y considérese el sistema: $x_{t+1} = Fx_t$. Si se supone sin pérdida de generalidad que todos los valores propios de F son distintos, la solución general es:

$$\hat{x}(t) = h_1\lambda_1^t x^1 + \ldots + h_n\lambda_n^t x^n$$

donde las h_i son constantes determinadas por las condiciones iniciales. Si e_i es una condición inicial, entonces:

$$\hat{x}(0) = e_i \text{ y}$$

$$\hat{x}(0) = e_i = h_1 x^1 + \ldots + h_i x^n$$

y por lo tanto:

$$M^t e_i = h_i\lambda_i^t x^1 + \ldots + h_n\lambda_n^t x^n,$$

y también

$$u^{1T}e_i = \sum_{i=1}^{n} h_i(u^{1T}x^i) = h_1(u^{1T}x^1),$$

como $x^1 > 0$, $u^1 > 0$ se tiene que:

$$h_1 = \frac{u^{1T}e_i}{u^{1T}x^1} > 0,$$

y dado que $\lambda_1 > |\lambda_i|$, tal que: $F^t e_i > 0$ para $t > k_j$. Ahora se toman los siguientes mínimos y máximos:

$$m_i = \min_{i=1,\ldots,m} \{k_j\} \text{ y } m = \max\{m_i, \ldots, m_n\}$$

de manera tal que entonces:

$$F^m e_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n, \text{ y así } F^m > 0.$$

2. Viabilidad y estabilidad en un sistema dinámico con matriz de Leontieff

En esta parte se demuestran dos teoremas de matrices no negativas que hacen posible concluir cuándo la viabilidad implica la estabilidad estructural de un sistema. La presentación de estos teoremas se encuentra en Miyazawa (1976), Gandolfo (1980) y Takayama (1986). La diferencia principal entre estos teoremas y los de la parte precedente es que aquellos no imponen condiciones de signo ni de magnitud sobre las entradas de las matrices del sistema que se analiza. En particular, el lema de Tsukui, que es el resultado más restrictivo en este sentido sólo postula una forma particular para la matriz F del sistema (1).

A continuación se exhibe un sistema dinámico en tiempo discreto que satisface la viabilidad de forma tal que implica su estabilidad estructural.

2.1. *Teoremas de matrices no negativas*

Los siguientes resultados serán importantes para concluir sobre la viabilidad del sistema (1).

TEOREMA 1. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ es una matriz no-negativa entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1) $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A^m$ converge.

2) Todos los valores característicos de A son menores que 1 en módulo.

3) $I - A$ es no singular e $(I - A)^{-1}$ es no negativa.

4) Para cualquier vector f no negativo la ecuación matricial $(I - A)x = f$ tiene una única solución no negativa.

PRUEBA. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Supóngase que A tiene forma canónica de Jordan $J = Q^{-1}AQ$ donde Q es la matriz de cambios de base. Entonces

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = \sum_{m=0}^{\infty} QJ^mQ^{-1},$$

$$J^m = \begin{bmatrix} J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_k^m \end{bmatrix}$$

y

$$J_k^m = \begin{bmatrix} \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \dots & \binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} \\ 0 & \lambda^m & \dots & \binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^m \end{bmatrix}$$

De este modo

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = Q\sum_{m=0}^{\infty} J^m Q^{-1} = Q\begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} J_2^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} J_k^m \end{bmatrix} Q^{-1} =$$

$$= Q\begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m & \sum_{m=0}^{\infty}\binom{t}{1}\lambda_k^{m-1} & \dots & \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m & \dots & \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

$\sum_{m=0}^{\infty} A^m$ converge si cada sumatoria $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m$ converge, y elio ocurre si y y sólo si $|\lambda| < 1$.

2) $\Leftrightarrow$3) Si se calcula el $\det(I - A)$ y se supone que la forma de Jordan de A es como antes, se tiene que:

$$\det(I - A) = \det(I - QJQ^{-1}) = \det(Q(I - J)Q^{-1}) = \det(I - J)$$

$$= \det\left(I - \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix} \right) \det\begin{bmatrix} I-J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I-J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I-J_k \end{bmatrix}$$

$$= \det(I - J_1) \dots \det(I - J_k),$$

pero

$$\det(I - J_k) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\lambda_i \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda_i)(1\ \lambda_i)\dots(1-\lambda_i) \neq 0$$

y, entonces, $\det(I - A) \neq 0$.

Además, si se define la norma de una matriz A como:

$$||A|| = \max_{i,j=1,\dots,n} \{a_{ij}\} = \alpha$$

se tiene que

$$||\sum_{m=0}^{\infty} A^m|| \leq |\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m| = \frac{1}{1-\alpha}$$

cuando $|\alpha| < 1$, que es el caso, porque $0 \leq a_{ij} \leq 1$. De esta forma $\sum_{m=0}^{\infty} A^m$ converge y por lo tanto:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^m + \dots,$$

y como $A > 0$ se concluye que $(I - A)^{-1} > 0$.

3) $\Leftrightarrow$ 4) Si $(I - A)x = f$ con $f > 0$ entonces: $x = (I - A)^{-1}f > 0$ porque: $(I - A)^{-1} > 0$. ■

TEOREMA 2. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$, no-negativa y con raíz de Frobenius λ_A. Si $S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, $\overline{S} = \max_j \{S_j\}$ y $\underline{S}$ $\min_j \{S_j\}$, entonces:

$$\underline{S} \leq \lambda_A \leq \overline{S}.$$

De manera particular, si $S_j = 1$ para toda j entonces $\lambda_A = 1$.

PRUEBA. Sea el vector propio $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \geq 0$, asociado con λ_A. Por definición se tiene que:

$$A\hat{x} = \lambda_A \hat{x},$$

es decir que:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j = \lambda_a \bar{x}_j .$$

Si se suma sobre i, se obtiene el siguiente resultado:

$$\lambda_A \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j s_j ,$$

por lo tanto

$$\lambda_A = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j s_j}{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i} .$$

Por lo tanto:

$$\underline{S} = \frac{\underline{S} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j}{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j s_j}{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i} \leq \frac{\bar{S} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j}{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i} = \bar{S} .$$

3. Conclusiones

El sistema $\Sigma = (F, G, H)$ con matriz: $F = I + F_1 = I + (I - A)$ con A no-negativa, $0 \leq a_{ij} \leq 1$, y $S_j = 1$, para todo j, es el que hace posible vincular viabilidad con estabilidad estructural. Sus características son, en parte, las que se observan en algunos sistemas derivados de modelos dinámicos como los mencionados en la introducción. El sistema Σ satisface las siguientes afirmaciones.

AFIRMACIÓN 1. *El sistema Σ es viable.*

PRUEBA. Se concluye por el lema (Tsukui), el teorema 2 de la parte I y por la proposición 3 del teorema 1 de esta parte. ■

AFIRMACIÓN 2. *El sistema Σ es inestable.*

PRUEBA. El módulo de los valores propios de A es $|\lambda_i| < 1$ por el teorema 2 de esta parte y los valores propios de

$$F = I + I - A = 2I - A$$

son $2 - \lambda_i = \mu_i$ y por tanto, $1 < |\mu_i| < 2$, según el mismo teorema y la proposición 2 del teorema 1 de esta parte. La inestabilidad se concluye por el teorema 1 de la parte 1. ■

AFIRMACIÓN 3. *El sistema Σ es estructuralmente estable.*

PRUEBA. Como el sistema es inestable con valores característicos diferentes de 1 es hiperbólico y, por el teorema 2, de la parte I es estructuralmente estable.. ■

Por todo lo anterior, la respuesta a la pregunta del título de nuestro trabajo es la siguiente. Sea el sistema: $\Sigma = (F, G, H)$, con:

a) $F = I + F_1 = I + (I - A)$,
b) $A \geq 0,\ 0 \leq a_{ij} \leq 1$, y
c) $S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, \ldots, n.$

Entonces el sistema es relativamente estable y, por lo tanto: viable, inestable en el sentido de Lyapunov y estructuralmente estable.

Conviene señalar el significado económico de esta respuesta. En el marco de un sistema como el postulado, la presencia de trayectorias que conservan cierta proporcionalidad positiva respecto al crecimiento balanceado garantiza sus signos positivos y, a su vez, esta viabilidad implica que la forma que siguen las trayectorias permanece, aun cuando se perturben las matrices del sistema. Pero ello depende de condiciones que, a pesar de su sentido económico, no tienen porqué ser relevantes.

En conclusión, dada la obvia restrictividad de la condición suficiente encontrada para que un sistema dinámico lineal en tiempo discreto sea viable de manera que implique su estabilidad estructural, es probable que sean derivables condiciones más generales. Si ese no fuera el caso, la obtención de las propiedades cualitativas de los modelos del tipo aludido se vería seriamente cuestionada porque es difícil que éstos cumplan las condiciones planteadas arriba.

Bibliografía

Barnet, S., and R.G. Cameron (1985). *Introduction to Mathematical Control Theory*, Oxford University Press, Oxford.

Casti, J.L. (1977). *Dynamical Systems and their Applications: Linear Theory*, Academic Press.

Kornai, J., and B. Martos (comps.) (1982). *Non-Price Control*, North-Holland, Amsterdam.

Gandolfo, G. (1980). *Economics Dynamics: Methods and Models*, Amsterdam, North Holland.

Goodwin, R. M., and L. F. Punzo (1987). *The Dynamics of a Capitalist Economy*, A Multi-Sectoral Approach, Westview Press.

Martos, B. (1990). *Economic Control Structures, A non-Walrasian Approach*. North Holland.

Más-Collel, A. (1986). "Notes on prices and quantity tatonnement dynamics", en H.F. Sonnenschein (comp.) *Models of Economic Dynamics*.

Miyazawa, K. (1976). *Input-Output Analysis and the Structure of Income Distribution*, Springer-Verlag, New York. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems no. 116.

Pyatt, G., and I.J. Round (comps.) (1985) *Social Accounting Matrices. A Basis for Planning*, World Bank, Washington.

Solow, R., y P.A. Samuelson (1953). "Balanced Growth under Constant Return to Scale", *Econometrica*, vol. 21.

Takayama, A. (1986). *Mathematical Economics*, Cambridge, Cambridge University Press.