SOBRE LA TIPOLOGÍA DE LOS CAMBIOS TECNOLÓGICOS EN UN MODELO LINEAL DE PRODUCCIÓN*

Pedro Uribe
Universidad de Guadalajara

Resumen: Se considera un modelo lineal de producción no conjunta con trabajo heterogéneo, endogenizado a la manera de Morgenstern y Thompson (1976) para: *i)* demostrar que la condición de Okishio-Roemer para la productividad de un cambio tecnológico es localmente necesaria; *ii)* estudiar la repercusión de un cambio productivo sobre el poder adquisitivo del salario, y *iii)* presentar una nueva tipología de los cambios tecnológicos que da cuenta de los efectos sobre el empleo de los cambios que sustituyen unos insumos por otros. El enfoque se puede usar para el estudio de las condiciones de validez de las conjeturas de la economía marxista sobre la "tasa decreciente de ganancias".

Abstract: This paper considers a linear no-joint production model with heterogeneous labour, endogenised in the manner of Morgenstern and Thompson (1976). It aims at *i)* showing that the condition of Okishio and Roemer for the productiveness of a technological change is locally necessary; *ii)* to study the effect of a technological change in the purchasing power of wages and *iii)* propose a new classification of technological changes that is able to account for the effects on employment of substitution between inputs. As a byproduct, one derives a new proof of the general non-holding of the marxian conjecture of the "falling rate of profit" and its independence of the "reserve army".

* Versión revisada del trabajo presentado en el XXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Morelia, 1993. En él se generalizan resultados presentados en el III Coloquio Nacional de Economía Matemática y Econometría, Guanajuato, 1993. Algunos de ellos, como la necesidad de la condición de Okishio a nivel local y la ecuación (4) se adelantaron en Uribe (1983) y se han incluido, tanto en los trabajos de Guanajuato y de Morelia como aquí, en pro de un tratamiento completo del tema.

1. Introducción

Aparte de la sustitución entre trabajo y "capital"[1], abundantemente estudiada por la literatura en materia de cambio tecnológico, es relevante la sustitución de unos insumos por otros. El manejo del "capital" como un vector de insumos heterogéneos permite estudiar la sustitución de unos insumos por otros en términos de sus efectos sobre el empleo, *vía* los multiplicadores de trabajo. Este tratamiento tiene relación cercana con el análisis del cambio tecnológico en términos de la sustitución trabajo-capital en Morishima (1973) y Roemer (1977), que a su vez tiene relación con las conjeturas de la "tasa decreciente de ganancias" y el "ejército de reserva" de la economía marxista. Vale la pena elucidar estos temas, independientemente del colapso del "socialismo real" en las estructuras burocratizadas de Europa Oriental. El propósito de este artículo es presentar algunas ampliaciones y generalizaciones relevantes: en primer lugar, caracterizar el efecto de un cambio tecnológico sobre los precios-salario (y por tanto sobre el poder adquisitivo del salario) en una economía con tecnología lineal de producción no conjunta, trabajo heterogéneo y perfecta movilidad intersectorial del capital (financiero, *i.e.,* de la inversión). En segundo, ampliar y profundizar la clasificación tradicional de los cambios tecnológicos en "ahorradores" o "usadores" de trabajo o de capital, proponiendo criterios que conducen a una tipología completa de cambios tecnológicos multidimensionales (vectoriales, incluyendo a los que consisten en sustituir unos insumos por otros) donde la literatura ofrece solamente tipologías parciales.

Morishima y Roemer proponen tipologías de cambios tecnológicos según su impacto sobre el empleo y sus características de ahorro de trabajo y/o de capital. En este artículo se unifican y se generalizan los conceptos de Morishima y Roemer, dando lugar a los conceptos de cambios tecnológicos ahorradores y usadores *débiles* de capital, que comprenden como casos particulares a los tipos de Roemer, a los que llamaremos *estrictos.*[2]

[1] Salvo en dos ocasiones en las que el término significa capital financiero, y que se hacen explícitas en el texto, "capital" se entenderá como conjunto de bienes de producción, o sea insumos.

[2] La tipología de Roemer deja fuera los cambios que sustituyen unos insumos por otros.

Un cambio tecnológico es *productivo* en el sentido de Okishio[3] si produce crecimiento en el valor de equilibrio (Von Neumann) de la tasa de rentabilidad del capital. El efecto de un cambio tecnológico productivo sobre los precios-salario es aditivo: se trata de la suma de los efectos de los cambios que ocurren en cada una de las técnicas usadas por la economía. Bajo el supuesto de producción no conjunta, cada técnica está asociada unívocamente a la producción de un bien (o agregado supuestamente homogéneo de bienes) y se puede concluir que sólo cambios "muy productivos", *i.e.,* cuya reducción de costo sea muy considerable, en una técnica dada, redundan en la reducción de los precios-salario de bienes producidos por otras técnicas. Los cambios productivos en una técnica tienen el efecto contrario sobre los precios de los demás bienes cuando no son suficientemente grandes. Detrás de esto hay una intuición que, a grandes rasgos, diría más o menos lo siguiente: un productor que logra un cambio tecnológico productivo goza momentáneamente de una ventaja monopólica, que se disuelve al igualarse la tasa de ganancias en un nuevo equilibrio. Como la nueva tasa de equilibrio es superior a la que los productores obtenían antes del cambio, aquellos que no logran incrementos de productividad solamente pueden ofrecerla aumentando precios.[4] Esta intuición encuentra cierto apoyo en los resultados que se obtienen en la sección 4, desde luego bajo el supuesto de perfecta movilidad intersectorial del capital financiero.

En el caso de cambios productivos, los cambios usadores débiles de capital son forzosamente ahorradores *netos* de trabajo *vía* multiplicadores (trabajo incorporado). Los cambios improductivos, a los que se refiere la economía marxista, pueden ser, entre otras cosas, usadores de capital y de trabajo a la vez, de modo que su impacto sobre el empleo puede ser, eventualmente, *independiente de su intensidad de capital.* Aparentemente, esto resuelve la conexión entre las hipótesis marxistas de la tasa decreciente de ganancias y el crecimiento del "ejército de reserva", en el sentido de que *son independientes.*

Después de la necesaria lista de definiciones y convenciones de notación en la sección 2, la 3 se ocupa de la conjetura de la tasa

[3] Véase Okishio (1961).
[4] Recuérdese que *el numerario está dado*, esto es, se trata de precios-salario.

decreciente de ganancias y de la condición (suficiente)[5] de Okishio (1961) para que la tasa de ganancias de equilibrio en el modelo Marx-Morishima sea creciente. La sección 4 se ocupa del efecto de un cambio tecnológico productivo en el sentido de Okishio, sobre los precios de equilibrio Von Neumann, medidos en términos de salario nominal, *i.e.*, vistos como *trabajo comandado.* La 5 plantea el modelo general de análisis del efecto del cambio tecnológico sobre el empleo, *vía* cambios en el trabajo incorporado, y generaliza, para terminar, las clasificaciones del cambio tecnológico de Morishima (1973) y Roemer (1977), y relaciona la nueva tipología con la dirección de cambio de la tasa de ganancias de equilibrio y los cambios en el empleo.

2. Notación y definiciones

Se supone un modelo lineal de producción no conjunta, con n bienes, n actividades y K tipos distintos de trabajo. Los bienes y las actividades corresponden en forma biunívoca. Usaremos la siguiente notación:

a_{ij} es el uso de insumo i por unidad de nivel de la actividad j; el nivel unitario de la actividad j es el que produce una unidad de bien j.

ω_k es la tasa de salario real (o nivel de consumo) para el trabajo de tipo k. El vector de tasas de salario real se denotará por ω y su diagonalización (la matriz $(\omega_k\delta_{kh})$ por Ω.

c_{ik} es la cantidad de bien i que consume un trabajador de tipo k por jornada a nivel de salario real $\omega_k = 1$. El vector de consumo de un trabajador de tipo k se denotará por c^k y C es la matriz de elementos c_{ik}.

Se supone que, cuando el salario real es ω_k, un trabajador de tipo k consume $\omega_k c_{ik}$ unidades de bien i por jornada.

l_{kj} es el uso de trabajo de tipo k por la actividad j, medido en jornadas por unidad de nivel de la actividad.

[5] Okishio y Roemer demostraron teoremas *globales* de suficiencia; el que se presenta aquí es un teorema *local* de suficiencia y necesidad. Hasta donde el autor está informado, no existe una condición global necesaria para la productividad del cambio tecnológico.

p_i es el precio unitario de *equilibrio* del bien i.

x_j es el nivel de *equilibrio* de la actividad j. Dados el supuesto de no producción conjunta y la correspondencia biunívoca entre bienes y actividades, x_j es la producción bruta de equilibrio del bien j.

r es la tasa de ganancias de equilibrio (única uniforme, *i.e.*, única igual para todas las actividades).

W_k $= \omega_k p'c^k$ es el salario nominal (evaluado a precios de equilibrio) de los trabajadores de tipo k.[6]

L es la matriz de elementos l_{kj}; su columna j se denotará por L^j y su renglón k, *escrito como columna*, por l^k.

v^k $= (I - A')^{-1} l^k$ es el *trabajo incorporado de tipo k* por unidad de cada bien. (En el caso en que $K = 1$, $(I - A')^{-1} l$ es el "valor trabajo" de Marx, si la selección de técnicas que define a A minimiza el uso de trabajo al nivel de toda la economía).[7]

Q $= A + C\Omega L$ es la matriz de coeficientes técnicos completos, incluyendo el consumo de bienes salario (reproducción de la fuerza de trabajo).

λ es la raíz de Frobenius de Q.

r $= (1 - \lambda) / \lambda$ se deriva de la definición de la tasa uniforme de ganancias por $p = (1 + r)Q'p$.

3. Cambios tecnológicos productivos

Considérese el caso de un solo tipo de trabajo, $k = 1$. Sean: c el único vector de consumo de los trabajadores, v el único vector de trabajo incorporado y l el único vector de uso directo de trabajo por las n actividades. Sean también:

θ_i $= (A'v)_i / (\omega v'c) l_i$, la composición de valor (composición orgánica del capital en Marx) para el bien i;

si θ es el vector de elementos θ_i, $\bar{\theta} = x'\theta$, la composición media de valor del capital.

e $= (1 - \omega v'c) / \omega v'c$ la *tasa de plusvalía* o tasa de explotación.

[6] Los vectores son columnas y la prima o el acento denotan transposición.
[7] Véase Morishima y Catephores (1978).

De la expresión

$$r = \frac{e}{1+\bar{\theta}}$$

algunos textos marxistas sostienen la línea original de Marx, en el sentido de afirmar que es inevitable el descenso de r, ante cambios tecnológicos capital-intensivos, *i.e.*, que aumentan $\bar{\theta}$, a los que los capitalistas se ven obligados a acudir por la competencia. Tal creencia se puede explicar basándose en el concepto de *precios de producción* que maneja Marx: sea r_0 la tasa de ganancias de Marx, esto es, la dada al principio de este párrafo. El (primer) sistema de precios de producción se define como:

$$p_1 = (1 + r_0)Q'v.$$

Se puede ver sin dificultad que $p_i^1 - v_i$ tiene el signo de $\theta_i - \bar{\theta}$, de modo que un capitalista, para ganar más, tendría que aumentar la composición de valor de su proceso de producción.[8] La afirmación de una tasa de ganancias decreciente implicaría o bien que e permanece constante, o bien que crece más despacio que $\bar{\theta}$.[9] Nos ocupamos de este tema en seguida. Los puntos sobre las variables indican derivación respecto a tiempo. Desde luego, la r a la que nos referiremos será la de equilibrio: una media depende de la composición de la producción, y los cambios en r que responden a cambios de composición de la producción no tienen ninguna relación con el cambio tecnológico, que es nuestro objeto de análisis. De $\lambda p = Q'p$ se obtienen de inmediato:

$$\dot{\lambda}p + \lambda\dot{p} = \dot{Q}'p + Q'\dot{p} \tag{1}$$

donde, obviamente, $\dot{Q} = (\dot{q}_{ij})$ es el *cambio de técnica.* Agregando en (1) con un vector de producción x tal que $p'x > \theta$ y despejando $\dot{\lambda}$:

[8] Obviamente, si todos los capitalistas se basaran en esta consideración terminarían autodestruyéndose, puesto que $\bar{\theta}$ crecería sin cota. Sólo la falta de perspicacia explica el intento de fundamentar una conjetura de "tasa decreciente de ganancias" en la igualdad de signos mencionada.

[9] Esto no lo deja de notar Marx; véase *El Capital*, tomo III, cap. XIV.

$$\dot{\lambda} = \frac{p'\dot{Q}x - \dot{p}'(\lambda I - Q)x}{p'x} \tag{2}$$

En una vecindad de la producción $x = (1 + r)Qx$, la de equilibrio Von Neumann, el signo de $\dot{\lambda}$ es el de $p'\dot{Q}x$, y como $sgn\ \dot{\lambda} = -\ sgn\ \dot{r}$, r crece si, y solamente si, el costo total de producción (a los precios vigentes antes del cambio) decrece en virtud de éste.

Consideramos cambios en la técnica de una sola actividad, o sea:

$$\dot{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dot{q}_{1j} & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & \dots & \dot{q}_{nj} & \dots & 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, \dot{Q}^j, \dots, 0)$$

Q^j la columna j de $Q = A + C\Omega L$. Desde luego, $\dot{Q} = \dot{A} + C\Omega\dot{L}$, puesto que $C\Omega$ es el consumo de los trabajadores que por hipótesis no cambia: $\dot{\omega}_k = 0$ para todo k, $\dot{c}_{ik} = 0$ para todo i y todo k.[10] Identificaremos entonces el cambio de técnica con la pareja $(\dot{A}, \dot{L})$. Obviamente $\dot{Q} = \dot{A}^j + C\Omega\dot{L}^j$.

En lo que sigue identificamos el cambio en una sola técnica con la pareja $(\dot{A}^j, \dot{L}^j)$.

Definimos $\overline{\omega}$ como un *salario de referencia* que servirá como numerario para los precios y los salarios; el salario medio o el salario mínimo podrían ser elecciones más o menos convencionales. Así, digamos que los salarios nominales se expresarán como múltiplos del salario mínimo: $\beta_k = W_k / \overline{\omega}$. Sean $l_j^* = \sum_k \beta_k l_{kj}$, l^* el vector de elementos l_j^* y $\overline{p} = p / \overline{\omega}$ el vector de precios/salario (precios en términos del salario mínimo o del numerario que se haya escogido). Entonces

$$\overline{p}'\dot{Q}^j x = (\dot{A}^{j\prime}\overline{p} + \overline{p}'C\Omega\dot{L}^j)x_j = (A^{j\prime}\overline{p} + \dot{l}_j^*)x_j.$$

Como $x_j > 0$ (es ocioso analizar el cambio tecnológico para un bien que no se produce, o en una actividad que no se usa),

[10] El salario real cambiará *una vez que se definan nuevos precios de equilibrio*, con o sin cambios en el salario nominal.

$$sgn\,\dot{\lambda} = sgn\,(\dot{A}^{j\prime}\,\bar{p} + \dot{l}^*_j),$$

y la condición para que $\dot{r} > 0$ se puede enunciar como:

TEOREMA. *En una vecindad de la producción de equilibrio,* $\dot{r} > 0$ *si, y solamente si,* $\dot{A}^{j\prime}p + \dot{l}^*_j < 0$.

La condición anterior se conoce como *condición generalizada de Okishio.*[11] El término $O_j = \dot{A}^{j\prime}p + \dot{l}^*_j$ se llamará *término de Okishio* (generalizado, adjetivo que se omitirá en lo que sigue), asociado al cambio tecnológico $(\dot{A}^j, \dot{L}^j)$. Se dirá que el cambio $\dot{A}^j, \dot{L}^j)$ es *productivo* si $O_j < 0$.

4. Cambio tecnológico y sistema de precios: poder adquisitivo del salario

Nos interesa ahora el efecto del cambio tecnológico sobre los precios *vistos como (recíprocos del) poder adquisitivo del salario*, o sea, precios medidos en unidades salario. Directamente, el cambio tecnológico no afecta al salario real: lo afecta una vez que se fijan los nuevos precios de equilibrio. En lo que sigue se omite la barra de $\bar{p}$, entendiéndose siempre precios-salario (la unidad que se haya escogido como numerario).

Nótese en primer lugar que, si $A = A(t)$ es una matriz de funciones de t, derivables, $dI/dt = 0$ implica que

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

de modo que

$$\frac{d(\lambda I - A')^{-1}}{dt} = (\lambda I - A')^{-1}(\dot{A}' - \dot{\lambda} I)\,(\lambda I - A')^{-1}$$

y entonces $p = (\lambda I - A')^{-1} l^*$ implica que:

[11] Véase Okishio (1961) para el caso de trabajo homogéneo ($K = 1$).

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= (\lambda I - A')^{-1}\dot{l} + \left(\frac{d(\lambda I - A')^{-1}}{dt}\right) l^* \\
&= (\lambda I - A')^{-1}\,[\dot{l} + (\dot{A}' - \dot{\lambda} I)p] \\
&= (\lambda I - A')^{-1}(\dot{A}'p + \dot{l}^* - \dot{\lambda} p) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

En el caso de cambio de una sola técnica, la técnica j:

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= (\lambda I - A')^{-1}(O_j\delta^j - \dot{\lambda} p) \\
&= (\lambda I - A')^{-1}\dot{h} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

donde $\dot{h}_j = O_j - \dot{\lambda} p_j$, $\dot{h} = -\dot{\lambda} p_k$ para $k \neq j$.

Si $\dot{r} > 0$, $\dot{\lambda} < 0$ y $O_j < 0$, lo que implica que, para un cambio productivo, $\dot{h}_k > 0$ si $k \neq j$. Para el signo de $\dot{h}_j$, (2) implica:

$$
\dot{h}_j = \frac{O_j p'x - [O_j x_j + \dot{p}'(\lambda I - Q)x]p_j}{p'x}
$$

y, en una vecindad de la producción de equilibrio:

$$
sgn\ \dot{h}_j = sgn\ (O_j(p'x - p_j x_j)) = sgn\ O_j
$$

De este modo , si $(\dot{A}^j, \dot{L}^j)$ es productivo, $\dot{h}_j < 0$.

Sea α^{is} el elemento (i, s) de $(\lambda I - A)^{-1}$. Entonces:

$$
\dot{p}_s = \sum_i \dot{h}_i \alpha^{is} = \sum_{i \neq j} \dot{h}_i \alpha^{is} + \alpha^{js}\dot{h}_j = -\dot{\lambda}\sum_i p_i \alpha^{is} + \alpha^{js} O_j
$$

(véanse las igualdades que siguen a (4)). El primer término de la última expresión es positivo: ($\dot{\lambda} < 0$), el segundo es negativo: ($O_j < 0$, $\alpha^{js} > 0$). El cambio (productivo) tecnológico ($\dot{A}^j$, $\dot{l}^*_j$) produce disminución en el precio del bien k si y solamente si:

$$
O_j < \dot{\lambda}\sum_i p_i \frac{\alpha^{ik}}{\alpha^{jk}} < 0 \qquad (5)
$$

La ecuación (5) implica que, para cambios tecnológicos suficientemente "grandes", es posible que los precios (medidos en términos de salario) de los bienes cuya tecnología no haya cambiado puedan disminuir. Quizá sea frecuente el caso en el que un cambio "pequeño" haga descender los precios *solamente* para los bienes cuyas tecnologías se hayan hecho más eficientes, aumentando los precios de los demás.

5. Cambio tecnológico y empleo

En la sección que sigue estudiamos el efecto del cambio tecnológico sobre el empleo. Sea v_{kj} el trabajo incorporado de tipo k por unidad de la actividad j. La matriz $V=(v_{kj})$ satisface $V=VA+L$. Ciertamente, $v^* = V'\beta = A'V\beta + L'\beta = A'v^* + l^*$, de modo que el cambio tecnológico $(\dot{A}, \dot{L})$ tiene efectos desagregados sobre el empleo:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{L}(I-A)^{-1} + L(I-A)^{-1}\dot{A}(I-A)^{-1} \\ &= (V\dot{A} + \dot{L})\,(I-A)^{-1} \qquad (6)\end{aligned}$$

y efectos agregados:

$$\begin{aligned}\dot{v}^* &= (I-A')^{-1}\dot{l}^* + (I-A')\dot{A}(I-A)^{-1}l^* \\ &= (I-A')^{-1}(\dot{A}'v + \dot{l}^*) \\ &= (I-A')^{-1}(\dot{A}'p + \dot{l}^* - \dot{A}'(p-v^*)) \qquad (7)\end{aligned}$$

Considérese el empleo agregado (ponderado, con pesos β_h para el tipo de trabajo h) $\beta'Vf = v^{*\prime}f$, donde $f=(I-A)x$ es el producto neto neoclásico; en equilibrio Von Neumann $f = rQx + C\Omega Lx$. El efecto del cambio tecnológico está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{v}^{*\prime}f + v^{*\prime}\dot{f} &= (\dot{A}v + \dot{l}^*)'x + v^{*\prime}(I-A)\,(\lambda I - A)^{-1}(\dot{A} - \dot{\lambda}I)x \\ &= (\dot{A}v^* + \dot{l}^*)'x + \dot{v}^{*\prime}\Gamma(\lambda)\,(\dot{A} - \dot{\lambda}I)x \qquad (8)\end{aligned}$$

donde $\Gamma(\lambda)$ es lá "matriz de transformación"[12]

[12] $\Gamma(\lambda)$ expresa precios-salario (trabajo comandado) como función lineal del valor-trabajo (trabajo incorporado) en el caso de trabajo homogéneo, o los precios de equilibrio

$$\Gamma(\lambda) = (I - A)(\lambda I - A)^{-1}$$
$$= (I + (1 - \lambda)(\lambda I - A)^{-1})$$

Según la ecuación (8), el efecto del cambio tecnológico $(\dot{A}, \dot{l}^*)$ consta de dos términos: el primero, $(\dot{A}v^* + \dot{l}^*)'x$ es el efecto del cambio en los multiplicadores, esto es, en el trabajo incorporado por unidad de cada bien. El segundo, $\dot{v}^{*\prime}\Gamma(\lambda)(\dot{A} - \dot{\lambda}I)x$, es el efecto del cambio en el monto y la composición del producto neto, como resultado del cambio tecnológico.

A nivel agregado se logran algunos resultados concretos. Reexpresando la ecuación (7) para el efecto del cambio tecnológico $(\dot{A}^j, \dot{L}^j)$ sobre los multiplicadores v^*:

$$\dot{v}^* = (I - A')^{-1}(O_j - \dot{A}^{j\prime}(p - v^*))\delta^j$$
$$= (I - A')^{-1}\delta^j(O_j - \dot{A}^{j\prime}(p - v^*)) \tag{9}$$

$(I - A')^{-1}\delta^j$ es el renglón j de $(I - A)^{-1}$. De este modo:

$$\dot{v}_k^* = \alpha^{jk}(O_j - \dot{A}^{j\prime}(p - v^*))$$

y $sgn\ \dot{v}_k^* = sgn\ \dot{v}_h^* = sgn(O_j - \dot{A}^{j\prime}(p - v^*))$ para todo k y todo h.

Nótese que $u_{jk} = \dot{v}_k^*/\alpha^{jk} = O_j - \dot{A}^{j\prime}(p - v^*)$ no depende de k, por lo que lo denotamos por u_j y escribimos:

$$O_j = \dot{A}^{j\prime}(p - v^*) + u_j \tag{10}$$

Si $r > 0, p - v^*$ es un vector estrictamente positivo, puesto que

$$v^* = (I - A')l^* = \sum_{j=1}^{K}\beta_k(I - A')l^k = \sum_{j=1}^{K}\beta_k v^k,$$

donde cada v^k es estrictamente menor que p. De esta manera, si $r > 0$, $\dot{A}^j \geq 0$ implica $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*) > 0$, y $\dot{A}^{j\prime} \leq 0$ implica $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*) < 0$. Las proposiciones recíprocas son falsas. Además, $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*) = 0$ *no implica* $\dot{A}^j = 0$.

en términos del salario mínimo como función lineal del trabajo incorporado agregado $v^* = (I - A)^{-1}l^*$ en el caso general.

La terminología común en la literatura se debe a Morishima (1973) y Roemer (1977), que definen los siguientes nombres:

neutro (Morishima) si $u_j = 0$.
progresivo (Roemer) si $u_j < 0$.
regresivo (Roemer) si $u_j > 0$.
usador (ahorrador) de capital (Roemer) si $\dot{A}^j \geq 0$ (≤ 0).
usador (ahorrador) de mano de obra (Roemer) si $\dot{l}_j^* > 0$ (< 0).

Existen cambios no clasificables en este esquema. Concretamente, si $\dot{A}^j$ tiene tanto elementos positivos como negativos, no es usador ni ahorrador de capital en el sentido de Roemer. $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*)$ es una medida útil, en los sentidos siguientes:

i) para cambios neutros en el sentido de Morishima, $O_j = \dot{A}^{j\prime}(p - v^*)$, de modo que $sgn\ r = -\ sgn\ \dot{A}^{j\prime}(p - v^*)$.
ii) $\dot{A}^j \geqq (\leqq)\ 0$ implica $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*) \geq (\leq)\ 0$.

Una clasificación completa de los cambios tecnológicos con trabajo agregado l^*, según los signos de O_j, $\dot{A}^j$, $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*)$, $\dot{l}_j^*$ y u_j es la siguiente:

	>0	$=0$	<0
O_j	Improductivo (I)	Neutro (N)	productivo (P)
$\dot{A}^{j\prime}(p - v^*)$	usador débil de capital (UDC)	capital-neutro (CN)	ahorrador débil de capital (ADC)
$\dot{A}^j$	usador estricto de capital (UEC)	capital-nulo (CN)	ahorrador estricto de capital (AEC)
$\dot{l}_j^*$	usador directo de trabajo (UDT)	l^*-nulo (LN)	ahorrador directo de trabajo (ADT)
u_j	usador neto de trabajo (UNT)	Morishima-neutro (MN)	ahorrador neto de trabajo (ANT)

En la tabla se distinguen cambios usadores (ahorradores) *estrictos* de capital, que son lo que Roemer llama usadores (ahorradores) de capital, de los cambios usadores (ahorradores) *débiles* de capital, que son cambios tecnológicos con $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*) > 0$ (< 0) respectivamente. Todo cambio tecnológico es usador o ahorrador débil de capital, a menos que $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*) = 0$, en cuyo caso lo llamaremos *capital-neutro.* Si $\dot{A}^j = 0$, esto es, el cambio consiste solamente en cambiar l_j^*, diremos que $(0, \dot{l}_j^*)$ es *capital-nulo.*

De la tabla se obtienen algunas conclusiones bastante inmediatas, como lo ilustran las siguientes, que valen para cambios Morishima-neutros:

Ahorrador débil de capital equivale a productivo.[13]
Usador débil de capital equivale a improductivo.
Ahorrador directo de trabajo equivale a usador estricto de capital.
Usador directo de trabajo equivale a ahorrador estricto de capital.

El lector podrá obtener otras sin dificultad.

Obviamente, un cambio usador o ahorrador neto de trabajo no puede ser Morishima-neutro. Los cambios Morishima-neutros implican uso o ahorro de trabajo directo solamente; su efecto sobre el empleo es local. Importa, para las dos formulaciones de Marx, considerar cambios ahorradores netos de trabajo, esto es, con $u_j < 0$. Para cambios productivos $O_j < 0$, de modo que $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*)$ y u_j no pueden ser los dos positivos: si el cambio es usador (débil) de capital, debe ser ahorrador neto de trabajo. Marx se ocupa de los cambios improductivos. En tal caso se tiene que $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*) + u_j > 0$, y es posible tener cambios usadores tanto de capital como de trabajo. El decrecimiento de la tasa de ganancias por cambios usadores de capital es compatible con el decrecimiento neto en el empleo sólo para cambios suficientemente grandes, de modo que $\dot{A}^{j\prime}(p - v^*) > |u_j|$, con $u_j < 0$.

Bibliografia

Morgenstern, O. y G. L. Thompson (1976). *Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economies.* Lexington, Mass., Lexington Books.

[13] Teorema de Okishio-Roemer.

Morishima, M. (1973). *Marx's Economics: A Dual Theory of Value and Growth*. Cambridge University Press.
——— y G. Catephores (1978). "Value and Exploitation: A New Formulation", en M. Morishima y G. Catephores, *Value, Exploitation and Growth*. McGraw Hill U. K. Ltd., pp. 22-58.
Okishio, N. (1961). "Technical Change and the Rate of Profit", *Kobe University Economic Review*, vol. 7, pp. 86-99.
Roemer, J. (1977). "Technical Change and the Tendency of the Rate of Profit to Fall", *Journal of Economic Theory,* vol. 16, pp. 403-424.
Uribe, P. (1983). "La economía política de Marx a la luz de la economía matemática contemporánea", *Economía: teoría y práctica*, vol. 3, pp. 79-114.