UN ENFOQUE QUE UNIFICA EL MÉTODO DE AXIOMATIZAR VALORES LINEALES EN TEORÍA DE JUEGOS*

Francisco Sánchez Sánchez
CIMAT

Resumen: En la literatura de teoría de juegos se encuentra la axiomatización de diversos valores para juegos en forma de función característica, cada uno en un contexto particular. En este trabajo se presenta la axiomatización de diversos valores lineales bajo un mismo esquema. Se parte del hecho de que si el valor está establecido en una base, su linealidad lo determina en todo el espacio, para generar diferentes conceptos de solución al aplicar diferentes supuestos a los juegos que forman la base.

Abstract: In the literature of game theory there are several axiomatization of values for games in a characteristic form, each in a particular context. In this work, we present the axiomatization of several values under the same framework. We used the fact that if a lineal operator is defined in a base, it can be extended in a unique form to the whole space, in order to generate several solution's concepts. It is just varying the set of axioms that determine the solution in the base.

1. Introducción

En 1953, Shapley (1953) determina en forma única el valor que lleva su nombre a partir de tres axiomas: simetría, aditividad, y uno que engloba eficiencia y nulidad. Dubey, Neyman y Weber (1981), caracterizan a los semivalores que satisfacen linealidad, simetría, monotonía y proyección. El índice de Banzhaf lo axiomatiza Lehrer (1988) a partir de los axiomas de nulidad, reducción, igual tratamiento (se desprende de simetría) y otro

* Trabajo apoyado por Conacyt.

axioma que toma el papel de linealidad cuando la discusión se centra en juegos simples. Kalai y Samet (1987) hacen lo propio con los valores de Shapley ponderados a partir de cinco axiomas: eficiencia, aditividad, positividad, nulidad y sociedad.

En este trabajo se propone un enfoque común para axiomatizar valores lineales, el cual se utiliza para generar los resultados mencionados en el párrafo anterior. Se considera un espacio de juegos que forma un espacio vectorial, se utilizan axiomas complementarios para determinar el valor en una base del espacio vectorial, y se aprovecha el hecho de que la linealidad determina el valor en todo el espacio. La importancia de tener bases comunes radica en poder comparar los supuestos que determinan los valores al elegir alguno de ellos en aplicaciones particulares.

En la sección 2 se presentan los conceptos básicos, definiciones, y se enlistan los axiomas que se mencionan a lo largo del trabajo. En la parte 3 se caracterizan los valores lineales a partir de los valores en una base del espacio de juegos, el resultado se utiliza en las secciones 5 y 6 para determinar diversos valores y semivalores cambiando los axiomas que determinan los valores en la base. En la sección 7 se ilustra el uso de estos conceptos de solución con un par de aplicaciones.

2. Conceptos básicos

Si $N = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto finito de jugadores y se denota por 2^N a la familia de subconjuntos de N, entonces un juego v en forma de función característica se define como una función:

$$\mathrm{v} : 2^N \rightarrow \mathbf{R}$$

tal que $\mathrm{v}(\emptyset) = 0$. A cada $S \in 2^N$ diferente del vacío, se le llama coalición.

La interpretación intuitiva de cada uno de los conceptos anteriores es la siguiente:

Una coalición $S \in 2^N$ es un subconjunto de jugadores que potencialmente pueden jugar unidos, caso en el que consiguen una ganancia conjunta de $\mathrm{v}(S)$. Una coalición se considera formada no sólo cuando los jugadores que la constituyen han decidido jugar unidos, sino que también han acordado la forma de repartir la ganancia conjunta $\mathrm{v}(S)$.

El juego v especifica la ganancia que puede obtener cada una de las coaliciones.

Una partida se lleva a cabo de la siguiente forma: al conocer cada uno de los jugadores la función v, negocian libremente para formar coaliciones hasta obtener una partición $P = \{S_1, \ldots, S_r\}$ de N, donde ya se han formado cada una de las S_j. La partida termina con el pago de las ganancias, según lo acordado con anterioridad.

Como resultado de cada partida se obtiene un vector $x \in \mathbf{R}^n$, donde x_i es la ganancia que obtuvo el jugador i en la negociación. Por esta razón, a cualquier vector $x \in \mathbf{R}^n$ se le llama vector de pago. El problema principal en este tipo de juegos es encontrar un vector de pago o un conjunto de ellos que sean "justos" para un juego dado.

En 1953 Shapley enfoca el problema de la siguiente manera: forma el conjunto G de todos los juegos superaditivos[1] con n jugadores y define un operador

$$\psi : G \to \mathbf{R}^n$$

con lo que obtiene que, cualquiera que éste sea, en menor o mayor medida resuelve todos los juegos en G, y el problema de resolver todos los juegos en G lo cambia a seleccionar una "buena" ψ. Para ello, a este operador le adjudica tres propiedades "deseables", las cuales considera como axiomas, y demuestra que existe un único operador que las satisface. A raíz del trabajo de Shapley, se plantea el problema de encontrar otras soluciones a partir de una fundamentación axiomática. A una ψ así determinada se le conoce como valor, y un semivalor cuando el conjunto de axiomas no la determinan completamente. Adicionalmente, por solución se entenderá un operador ψ: $G \to \mathbf{R}^n$. A continuación se plantean algunos de los axiomas que se han manejado con frecuencia en teoría de juegos y que se utilizarán en este trabajo.

Es fácil ver, que tanto el conjunto de juegos con espacio de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, como el conjunto de juegos superaditivos sobre el mismo espacio, forman un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, si se define la suma y el producto como sigue:

[1] Un juego v se dice que es superaditivo si y sólo si, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para toda S y T en N tales que $S \cap T = \emptyset$.

a) $(v + \theta)(S) = v(S) + \theta(S)$ para todo $\nu, \theta \in G$
b) $(c\nu)(S) = c\nu(S)$ para todo $\nu \in G$ y $c \in R$.

donde G denota a cualquiera de estos conjuntos, convención que se mantendrá a lo largo del trabajo.

Axioma de linealidad: $\psi(\alpha\nu + \beta\theta) = \alpha\psi(\nu) + \beta\psi(\theta)$ para toda ν, $\theta \in G$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Ahora considere un juego ν y suponga que los jugadores intercambian papeles. Adicionalmente, suponga que cualquier grupo de jugadores logra la misma ganancia que la que conseguían en el juego original los jugadores a los que sustituyen. El axioma de simetría pide que el vector de pago asociado a este nuevo juego, sea la permutación correspondiente del vector de pago asociado al juego original; dicho brevemente, si los jugadores intercambian papeles, entonces deben intercambiar pagos.

En lo sucesivo se denotará por: $\Theta = \{\theta \mid \theta : N \to N, \theta \text{ biyectiva}\}$ y por

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$$

Es decir, Θ contiene todos los órdenes totales que se pueden definir sobre el conjunto N, o si se quiere, todas las permutaciones de los n jugadores. Cada θ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego, en particular el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$. A continuación se define formalmente el significado de las frases: "formar un juego intercambiando papeles" e "intercambiar pagos".

Para cada pareja $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$ se define un nuevo juego $\theta * \nu$ por:

$$(\theta * \nu)(S) = \nu(\theta(S))$$

y para cada pareja $(\theta, x) \in \Theta \times \mathbf{R}^n$ se define un nuevo vector en $\mathbf{R}^n$, $\theta * x$ donde su i-ésima coordenada está dada por: $(\theta * x)_i = x_{\theta(i)}$.

Estas definiciones se pueden interpretar como sigue: para $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$ dado, se desea que $\theta * \nu$ represente el juego, después de que los jugadores hayan intercambiado papeles de acuerdo con θ, como los jugadores en S suplantan a los que están en $\theta(S)$. Entonces lo que debe poder conseguir S en $\theta * \nu$ es lo que podía conseguir $\theta(S)$ en ν, es decir, $(\theta * \nu)(S) = \nu(\theta(S))$. Ahora, el pago que recibe el jugador i con $\theta * x$ es el que recibía $\theta(i)$ con x.

Axioma de simetría: $\psi(\theta * \nu) = \theta * \psi(\nu)$ para todo $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$.

Es decir, la solución ψ es simétrica si y sólo si para cualquier $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$, el monto que le asigna ψ a cada jugador i en $\theta * \nu(\psi_i(\theta * \nu))$ es el mismo que el que ψ le asigna al jugador que suplanta en $\nu(\psi_{\theta(i)}(\nu))$.

Para el siguiente axioma, si $\psi(\nu) = (\psi_1(\nu), \ldots, \psi_n(\nu))$ es el vector que le asocia ψ a ν, entonces se denota por:

$$\psi\nu(S) = \sum_{i \in S} \psi_i(\nu)$$

esto es, $\psi\nu(S)$ es el monto que la coalición S obtiene con la solución ψ.

Axioma de eficiencia: $\psi\nu(N) = \nu(N)$ para todo $\nu \in G$.

En otras palabras, el monto $\psi\nu(N)$ que se reparte entre todos los jugadores bajo ψ, es exactamente el monto $\nu(N)$ que puede conseguir la gran coalición.

DEFINICIÓN 1. *Se dirá que i es un jugador nulo en ν si y sólo si $\nu(S \cup \{i\}) = \nu(S)$ para toda $S \subseteq N$.*

Axioma de nulidad: Si i es un jugador nulo en ν, entonces $\psi_i(\nu) = 0$.

Alguien que sólo juegue el papel de observador del juego, debe ser excluido de la repartición.

Para cada coalición $T \subseteq N$ se deriva un juego ν_T amalgamando los jugadores de T en uno solo; a este jugador se le llamará T'. El espacio de jugadores para ν_T es $N \setminus T \cup \{T'\}$, y se define por:

$$\nu_T(S) = \nu(S)$$

$$\nu_T(S \cup \{T'\}) = \nu(S \cup T)$$

donde $S \subseteq N \setminus T$.

Axioma de reducción: $\varphi_i(\nu) + \varphi_j(\nu) \leq \varphi_{T'}(\nu_T)$ para cualquier coalición $T = \{i, j\}$ de dos jugadores.

El axioma de reducción dice que para cualquier coalición de dos jugadores $T = \{i, j\}$ la suma de los valores de i y j en el juego original es menor o igual al valor de T' en el nuevo juego. De acuerdo con este axioma la unificación de dos jugadores es productiva.

3. Linealidad

Si $\{\omega_T \mid \emptyset \neq T \subseteq N\}$ es una base arbitraria para G, entonces para cada v existen reales δ^v_T, $\emptyset \neq T \subseteq N$, tales que

$$v = \sum_T \delta^v_T \omega_T = A\delta^v$$

donde $a_{ST} = \omega_T(S)$ y por lo tanto:

$$\delta^v = A^{-1}v.$$

Como ψ es una solución lineal, se debe tener:

$$\psi(v) = \psi(\sum_T \delta^v_T \omega_T) = \delta^v_T \sum_T \psi(\omega_T) = B\delta^v = BA^{-1}v$$

donde $b_{iT} = \psi_i(\omega_T)$.

La base más comúnmente usada en teoría de juegos, y que se supondrá en lo sucesivo, es la formada por los juegos

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

para $\emptyset \neq T \subseteq N$.

Esto lleva a:

$$a_{ST} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$b_{iT} = \psi_i(u_T)$$

Nótese que A^{-1} no depende del juego, y que cada columna de B es el valor del juego base correspondiente. Así, los valores en la base están determinados, la linealidad establece el valor en todo el espacio. Aprovechando esta propiedad, cuando se requieran otros axiomas, bastaría exigir que se satisfagan en juegos de la forma u_T. A continuación se encuentra la matriz A^{-1} y posteriormente se analiza la matriz B.

LEMA 1. $\sum_{\{R \mid T \subseteq R \subseteq S\}} (-1)^{r+t} = \begin{cases} 1 & \text{si } T = S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es directa si T no está contenido en S o si $S = T$. Supóngase $T \subset S$, entonces

a) Si $T \cup \{i\} = S$, R toma los valores T y $T \cup \{i\}$ de donde

$$(-1)^{t+t} + (-1)^{t+t+1} = 0$$

b) Supóngase que para cualesquiera S y T tales $T \cup \{i_1, \ldots, i_k\} = S$ se tiene que

$$\sum_{\{R \mid T \subseteq R \subseteq S\}} (-1)^{r+t} = 0.$$

c) Sean S y T tales que $T \cup \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} = S$, entonces

$$\sum_{\{R \mid T \subseteq R \subseteq S\}} (-1)^{r+t} = \sum_{\{R \mid T \subseteq R \subseteq S,\, i_{k+1} \in R\}} (-1)^{r+t} + \sum_{\{R \mid T \subseteq R \subseteq S,\, i_{k+1} \notin R\}} (-1)^{r+t}$$

$$= \sum_{\{R \mid T \cup \{i_{k+1}\} \subseteq R \subseteq S\}} (-1)^{r+t} + \sum_{\{R \mid T \subseteq R \subseteq S \setminus \{i_{k+1}\}\}} (-1)^{r+t} = 0$$

PROPOSICIÓN 1. *Si a_{ST}^{-1} denota una entrada de la matriz A^{-1}, entonces*

$$a_{ST}^{-1} = (-1)^{s+t} a_{ST}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $D = AA^{-1}$, entonces

$$d_{ST} = \sum_R a_{SR}\, a_{RT}^{-1} = \sum_R (-1)^{r+t} a_{SR}\, a_{RT} = \sum_{\{R \mid T \subseteq R \subseteq S\}} (-1)^{r+t}$$

y por el lema anterior $D = I$.

Hasta aquí, con sólo pedir linealidad, se tiene que $\psi(v) = BA^{-1}v$, donde ya se ha caracterizado completamente A^{-1}. En lo sucesivo, se trabajarán diferentes conjuntos de axiomas para hacer lo propio con B.

4. Linealidad, simetría y nulidad

El siguiente lema asegura que el pago al jugador $i \in R$, en u_R, con una solución que satisface los axiomas de simetría y nulidad, depende únicamente de la cardinalidad de R.

LEMA 2. *Si ψ es una solución simétrica que satisface el axioma de nulidad, entonces*

a) $\psi_i(u_R) = \psi_j(u_T)$ *para todo* $i \in R$ *y* $j \in T$, *si* $|R| = |T|$

b) $\psi_i(u_R) = 0$, *si* $i \notin R$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase ψ una solución con las características del lema. Para $i, j \in R$ y θ definida por: $\theta(i) = j$, $\theta(j) = i$ y $\theta(k) = k$ para $k \neq i$, j se tiene que $\theta * u_R = u_R$ y por simetría

$$\psi(u_R) = \psi(\theta * u_R) = \theta * \psi(u_R)$$

es decir

$$\psi_i(u_R) = \psi_{\theta(i)}(u_R) = \psi_j(u_R)$$

Además, si $i \notin R$, i es un jugador nulo en u_R y por el axioma de nulidad $\psi_i(u_R) = \theta$. Con esto, $\psi_i(u_R)$ debe ser de la forma:

$$\psi_i(u_R = \begin{cases} q_R & \text{si } i \in R \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Ahora si S y T son tales que $s = t$ y θ es tal que $\theta(S) = T$, entonces $\theta * u_T = u_S$ y $\psi(u_S) = \psi(\theta * u_T) = \theta * \psi(u_T)$, esto es, si $i \in S$ y $\theta(i) = j$, entonces $j \in T$ y

$$q_S = \psi_j(u_S) = \psi_i(u_T) = q_T .$$

El pago común que recibe cada jugador de S, en u_S, cuando $|S| = r$ se denotará por q_r.

TEOREMA 1. *La solución ψ satisface los axiomas de linealidad, simetría y nulidad si y sólo si*

$$\psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_{s+1}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

donde

$$p_s = \sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t = \sum_{t=s}^{n} (-1)^{t+s} \binom{n-s}{t-s} q_t$$

para $s = 1, \ldots, n$.

Antes de entrar en la demostración, nótese que la última ecuación puede escribirse matricialmente como: $p = Mq$ donde

$$m_{st} \begin{cases} (-1)^{t+s} \binom{n-s}{t-s} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y además[2]

$$m_{st}^{-1} \begin{cases} \binom{n-s}{t-s} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Así, al ser M no singular, dado q queda determinado p y viceversa.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase ψ con las características del teorema, entonces por el lema anterior ψ determina q, la cual a su vez determina p. Ahora, sea $C = BA^{-1}$, entonces

$$c_{iS} = \sum_T b_{iT} a_{TS}^{-1} = \sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} (-1)^{t+s} b_{iT} =$$

Ahora bien, si $i \in S$

$$c_{iS} = \sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t = p_s$$

y si $i \notin S$

[2] Se desprende del hecho de que: $\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-k}{m} \binom{n}{k} = 0$. Ver Riordan (1978), pág. 15.

$$c_{iS} = \sum_{\{T \mid (S \cup \{i\}) \subseteq T\}} (-1)^{t+s} q_t$$

haciendo el cambio de variable $R = S \cup \{i\}$ se obtiene:

$$= - \sum_{\{T \mid R \subseteq T\}} (-1)^{t+r} q_t \doteq - p_{s+1}$$

Como $\psi(\text{v}) = BA^{-1}\text{v}$ se tiene que:

$$\psi_i(\text{v}) = \sum_{S} c_{iS}\text{v}(S) = \sum_{i \in T} c_{iT}\text{v}(T) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} c_{iS}\text{v}(S)$$

$$= \sum_{i \in T} p_t \text{v}(T) - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_{s+1}\text{v}(S)$$

y haciendo $S = T \setminus \{i\}$en el primer término:

$$= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_{s+1}\text{v}(S \cup \{i\}) - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_{s+1}\text{v}(S) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_{s+1}(\text{v}(S \cup \{i\}) - \text{v}(S))$$

Es fácil ver que la ψ dada en el teorema es lineal, simétrica y satisface el axioma de nulidad.

LEMA 3. *Si* $q_t = 1/t$ *entonces* $p_s = \dfrac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción matemática $n - s$. Para $s = n$, la demostración es directa. Supóngase que la aserción es válida para S con $s = k + 1, \ldots, n$. Entonces si $|S| = k$ y $l \notin S$,

$$\sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} = \sum_{\{T \mid S \subseteq T,\, l \notin T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} + \sum_{\{T \mid S \subseteq T,\, l \in T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t}$$

$$= \sum_{\{T \mid S \subseteq T \subseteq N \setminus \{l\}\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t} + \sum_{\{T \mid (S \cup \{l\}) \subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{t}$$

$$= \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!} - \frac{s!(n-s-1)!}{n!} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}.$$

LEMA 4. *Si* $q_t = 1/2^{t-1}$ *entonces* $p_s = \frac{1}{2^{n-1}}$.

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente por inducción sobre $n - s$, si $s = n$, entonces independientemente del valor de n, el único término en la suma es con $T = N$ y la ecuación satisface. Si S es tal que $s = n - k$ y $l \notin S$ entonces

$$\sum_{\{T \mid S \subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}} = \sum_{\{T \mid S \subseteq T \subseteq N \setminus \{l\}\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}} + \sum_{\{T \mid S \cup \{l\} \subseteq T\}} \frac{(-1)^{t+s}}{2^{t-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

PROPOSICIÓN 2. *Si* ψ *es una solución lineal entonces con la sucesión* $\{q_t\}$ *dada en el lema 2, se tiene que:*

a) Si $q_t = 1/t$ *entonces* ψ *es el valor de Shapley.*

b) Si $q_t = 1/2^{t-1}$ *entonces* ψ *es el valor de Banzhaf,*

Nótese que el axioma de eficiencia, el único que se utiliza en la demostración del valor de Shapley, y que no se menciona en la proposición anterior, determina $q_s = 1/s$.

5. Linealidad, simetría, nulidad y reducción

El valor de Banzhaf para el jugador i correspondiente al juego v con n jugadores es el siguiente:

$$\varphi_i(\mathrm{v}) = 1/2^{n-1} \sum_{S \subseteq N} [\mathrm{v}(S \cup \{i\}) - \mathrm{v}(S)]$$

En un juego simple, el valor de Banzhaf del jugador i, es el número de coaliciones perdedoras que se vuelven ganadoras cuando se les incorpora el jugador i, dividido entre el número de coaliciones que no lo contienen (incluyendo al vacío), con el fin de que el valor quede entre 0 y 1. La expresión anterior es una forma de generalizar esta idea.

LEMA 5. *Si* φ *es el valor de Banzhaf, entonces* $\varphi_i(\mathrm{v}) + \varphi_j(\mathrm{v}) = \varphi_{T'}(\mathrm{v}_T)$ *para toda coalición* $T = \{i, j\}$.

DEMOSTRACIÓN.

$$2^{n-1}(\varphi_i(\nu)+\varphi_j(\nu))=\sum_{S\subseteq N}[\nu(S\cup\{i\})-\nu(S)]$$

$$+\sum_{S\subseteq N}[\nu(S\cup\{j\})-\nu(S)]$$

$$=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}[\nu(S\cup\{i\})-\nu(S)+\nu(S\cup\{i,j\})-\nu(S\cup\{j\})]$$

$$+\sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}[\nu(S\cup\{j\})-\nu(S)+\nu(S\cup\{i,j\})-\nu(S\cup\{i\})]$$

$$=2\sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}[\nu(S\cup\{i,j\})-\nu(S)]=22^{n-2}\varphi_{T'}(\nu_T)$$

TEOREMA 2. *Existe una única solución ψ que satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad, reducción y $q_1=1$: el valor de Banzhaf.*

DEMOSTRACIÓN. La existencia nuevamente se demuestra exhibiendo que el valor de Banzhaf satisface los axiomas mencionados. Supóngase un operador ψ que satisface los cuatro axiomas mencionados en el teorema. Por el teorema 4.3 se tiene que:

$$\psi_i(\nu)=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}p^n_{s+1}(\nu(S\cup\{i\})-\nu(S))$$

$$=\sum_{i\in S}p^n_s\nu(S)-\sum_{i\notin S}p^n_{s+1}\nu(S)$$

$$\psi_{T'}(\nu_T)=\sum_{\{S\subseteq N'\mid T'\in S\}}p^{n-1}_s\nu_T(S)-\sum_{\{S\mid T'\notin S\}}p^{n-1}_{s+1}\nu(S)$$

$$=\sum_{\{S\subseteq N\mid\{i,j\}\subseteq S\}}p^{n-1}_{s-1}\nu(S)-\sum_{\{S\mid S\subseteq N\setminus\{i,j\}\}}p^{n-1}_{s+1}\nu(S)$$

así, $\psi_i(v) + \psi_j(v) \leq \psi_{T'}(v_T)$, si y sólo si,

$$\sum_{i \in S} p_s^n v(S) - \sum_{i \notin S} p_{s+1}^n v(S) + \sum_{j \in S} p_s^n v(S) - \sum_{j \notin S} p_{s+1}^n v(S)$$

$$\leq \sum_{\{S \mid \{i,j\} \subseteq S\}} p_{s-1}^{n-1} v(S) - \sum_{\{S \mid S \subseteq N \setminus \{i,j\}\}} p_{s+1}^{n-1} v(S)$$

si y sólo si

$$\sum_{\{S \mid \{i,j\} \subseteq S\}} (2p_s^n - p_{s-1}^{n-1})\, v(S) - \sum_{\{S \mid S \subseteq N \setminus \{i,j\}\}} (2p_{s+1}^n - p_{s+1}^{n-1})\, v(S)$$

$$+ \sum_{\{S \mid i \in S, j \notin S\}} (p_s^n - p_{s+1}^n)\, v(S) + \sum_{\{S \mid i \notin S, j \in S\}} (p_s^n - p_{s+1}^n)\, v(S) \leq 0$$

Nótese que en esta desigualdad se tiene uno y sólo un término por cada coalición. Así, debe suceder que:

$$2p_s^n = p_{s-1}^{n-1} \quad s = 2, \ldots, n; \; n \geq 2$$

$$2p_{s+1}^n = p_{s+1}^{n-1} \quad s = 0, \ldots, n-2; \; n \geq 2$$

$$p_s^n = p_{s+1}^n \quad s = 1, \ldots, n-1; \; n \geq 2$$

de donde se desprende fácilmente que

$$p_s^n = \frac{1}{2^{n-1}} q_1 = \frac{1}{2^{n-1}} \, .$$

6. Linealidad, nulidad y sociedad

Otro concepto de solución que es lineal es el valor de Shapley ponderado. El valor de Shapley del juego $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$ y $v(\{1, 2\}) = 1$ es $\psi(v)' = (1/2, 1/2)$; sin embargo, posiblemente alguno de los jugadores necesite realizar un mayor esfuerzo en la coalición $\{1, 2\}$. A partir de esta consideración se sugiere repartir de acuerdo con ponderaciones preestablecidas. Esta idea da lugar al valor de Shapley ponderado, un valor que no necesariamente satisface el axioma de simetría.

DEFINICIÓN 2. *Se dirá que S es una coalición natural de socios en el juego* v, *si para cada* $T \subset S$ $(T \neq S)$ *y* $R \subseteq N \setminus S$, $\mathrm{v}(R \cup T) = \mathrm{v}(R)$.

Una coalición natural de socios se comporta como un solo individuo, ya que ninguna subcoalición propia tiene poder.

Axioma de sociedad: Si S es una coalición natural de socios en v, entonces $\psi_i(\mathrm{v}) = \psi_i(\psi\mathrm{v}(S)u_S)$ para todo $i \in S$.

La interpretación de este axioma es la siguiente: se espera que cada coalición natural de socios juegue como un solo individuo en v y negocie lo obtenido entre sus elementos en forma independiente.

DEFINICIÓN 3. *El valor de Shapley ponderado con un sistema de ponderación simple* $w \in \mathbf{R}^n$, $w > 0$, *es un mapeo lineal* $\psi^w : G \to \mathbf{R}^n$ *tal que*:

$$\psi_i^w(u_s) = \begin{cases} \dfrac{w_i}{w(S)} & si\ i \in S \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

LEMA 6. *Si S es una coalición natural de socios y* $\delta = A^{-1}\mathrm{v}$, *entonces* $\delta_T = 0$ *si* $S \not\subseteq T$ *y* $S \cap T \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $S \not\subseteq T$ y $S \cap T \neq \emptyset$, entonces

$$\delta_T = \sum_{R \subseteq T} (-1)^{t+r}\mathrm{v}(R)$$

ahora para $R \subseteq T$, sea $R_s = S \cap R$ y $R_t = R \cap (T \setminus S)$,

$$= \sum_{R_t \subseteq T \setminus S} \; \sum_{R_s \subseteq S \cap T} (-\mathrm{i})^{t + r_s + r_t}\mathrm{v}(R_s \cup R_t)$$

$$= \sum_{R_t \subseteq T \setminus S} (-1)^{r_t}\, \mathrm{v}(R_t) \sum_{R_s \subseteq S \cap T} (-1)^{t + r_s} = 0$$

por el lema 4.3.

TEOREMA 3. ψ *es una solución lineal que satisface los axiomas de sociedad, nulidad y* $\psi(u_N) > 0$ *si y sólo si existe w tal que ψ es el valor de Shapley ponderado con sistema de ponderación simple w.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ψ una solución que satisfaga los axiomas mencionados en el teorema. Como N es una coalición natural de socios en u_N:

$$\psi_i(u_N) = \psi u_N(S)\psi_i(u_S)$$

así, basta considerar $w_i = \psi_i(u_N)$ y sustituir en la ecuación anterior para obtener para $\psi_i(u_S) = w_i / w(S)$.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, primero supóngase que el jugador i es un jugador nulo en v. Entonces,

$$\psi_i(v) = \sum_T \sum_S a_{ST}^{-1} v(T) = \sum_T \sum_{\{S \mid i \in S, S \subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} v(T)$$

$$= \sum_{\{T \mid i \in T\}} \sum_{\{S \mid i \in S, S \subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} v(T)$$

$$+ \sum_{\{T \mid i \notin T\}} \sum_{\{S \mid i \in S, S \subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} v(T)$$

$$= \sum_{\{T \mid i \in T\}} \sum_{\{S \mid i \in S, S \subseteq T\}} \frac{w_i}{w(S)} (-1)^{s+t} [v(T \cup \{i\}) - v(T)] = 0.$$

Ahora, como el valor de Shapley ponderado es lineal, el axioma de sociedad se puede expresar como:

$$\frac{w_i}{w(S)} \chi'_S B A^{-1} v = B^i A^{-1} v$$

donde S es una coalición natural de socios que contiene al jugador i, $b_{jT} = \frac{w_j}{w(T)}$ si $j \in T$ y cero de otra forma, B^i el i-ésimo renglón de la matriz B y $\chi_S \in \mathbf{R}^n$ con su j-ésima coordenada igual a 1 o 0 dependiendo de si $j \in S$ o no. Denotando por $\delta = A^{-1} v$, la igualdad es equivalente a:

$$\chi_S' B \delta = \frac{w(S)}{w_i} B^i \delta .$$

Ahora bien,

$$\chi'_S B \delta = \sum_{j \in S} \sum_{j \in T} \frac{w_j}{w(T)} \delta_T = \sum_T \frac{w(S \cap T)}{w(T)} \delta_T$$

y $$\frac{w(S)}{w_i} B^i\delta = \frac{w(S)}{w_i} \sum_{i \in T} \frac{w_i}{w(T)} \delta_T = \sum_{i \in T} \frac{w(S)}{w(T)} \delta_T$$

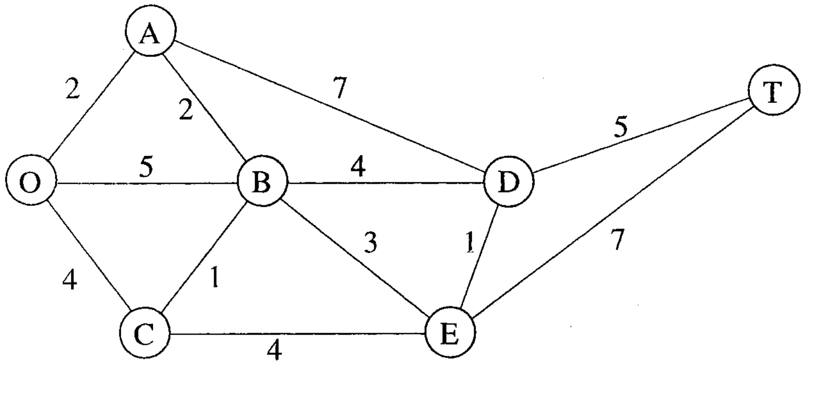
aplicando el lema anterior, se tiene que las dos últimas expresiones son iguales.

7. Aplicaciones

Se desea llevar una señal desde un origen a n poblaciones, se puede pensar en una red telefónica, cablevisión o una red de agua. La señal que llega a una población no necesita provenir directamente del origen, sino que se puede obtener de una población ya conectada. El único requisito es que todos los nodos estén conectados por alguna ruta al origen. Supóngase que se cuenta con una gráfica, donde se tiene un nodo por cada población, otro por el origen, una arista entre cada par de nodos que se puedan conectar directamente y para cada una de ellas el costo de hacerlo.

El costo total de conectar a las n poblaciones, es el asociado al mínimo árbol que genera la gráfica. El problema que aquí se aborda es cómo repartir "equitativamente" ese costo total entre las n poblaciones.

Si $N = \{A, B, \ldots\}$ representa al conjunto de las poblaciones, se propone definir el juego por: $\nu(S)$ = costo mínimo de llevar la señal a las poblaciones en $S \subseteq N$, y utilizar alguno de los valores de teoría de juegos para repartir el costo entre las poblaciones. A manera de ejemplo, considere la siguiente gráfica:



Las siguientes matrices sintetizan, respectivamente, el costo de conectar directamente cada par de nodos y la trayectoria "más corta" entre cada par de ellos, que en este caso, es el mínimo costo con el que se pueden conectar.[3]

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} O & A & B & C & D & E & T \end{array} \\
\begin{array}{c} O \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 2 & 5 & 4 & \infty & \infty & \infty \\
2 & 0 & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty \\
5 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & \infty \\
4 & \infty & 1 & 0 & \infty & 4 & \infty \\
\infty & 7 & 4 & \infty & 0 & 1 & 5 \\
\infty & \infty & 3 & 4 & 1 & 0 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 7 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} O & A & B & C & D & E & T \end{array} \\
\begin{array}{c} O \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 2 & 4 & 4 & 8 & 7 & 13 \\
2 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 & 11 \\
4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\
4 & 3 & 1 & 0 & 5 & 4 & 10 \\
8 & 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 5 \\
7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 6 \\
13 & 11 & 9 & 10 & 5 & 6 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Para calcular $v(S)$, se modificó el método de Dijkstra de la siguiente forma:
Se inicia con:

$$P := \{O\},\ T := N \setminus \{O\} \text{ y } v(S) = 0.$$

Iteración:

$b_{kl} = \min\ \{b_{ij} : i \in P \text{ y } j \in T\}$
$v(S) := v(S) + b_{kl}$
$M :=$ {nodos en la trayectoria más corta entre k y l}
$P := P \cup M$
$T := T \setminus M$

[3] El método que se utilizó para calcularla fue el de Floyd-Warshall, ver Lawler (1976).

Si $T \cap S \neq \emptyset$ se realiza otra iteración, de otra forma se ha terminado donde b_{ij} denota el valor de la trayectoria más corta entre i y j. Para este ejemplo se obtuvo el siguiente juego:

$\nu(\{A\}) = 2$	$\nu(\{A, B, C\}) = 5$	$\nu(\{A, B, C, E\}) = 8$
$\nu(\{B\}) = 4$	$\nu(\{A, B, D\}) = 8$	$\nu(\{A, B, D, E\}) = 8$
$\nu(\{C\}) = 4$	$\nu(\{A, C, D\}) = 9$	$\nu(\{A, C, D, E\}) = 9$
$\nu(\{D\}) = 8$	$\nu(\{B, C, D\}) = 9$	$\nu(\{B, C, D, E\}) = 9$
$\nu(\{E\}) = 7$	$\nu(\{A, B, E\}) = 7$	$\nu(\{A, B, C, F\}) = 14$
$\nu(\{F\}) = 13$	$\nu(\{A, C, E\}) = 8$	$\nu(\{A, B, D, F\}) = 13$
$\nu(\{A, B\}) = 4$	$\nu(\{B, C, E\}) = 8$	$\nu(\{A, C, D, F\}) = 14$
$\nu(\{A, C\}) = 5$	$\nu(\{A, D, E\}) = 8$	$\nu(\{B, C, D, F\}) = 14$
$\nu(\{B, C\}) = 5$	$\nu(\{B, D, E\}) = 8$	$\nu(\{A, B, E, F\}) = 13$
$\nu(\{A, D\}) = 8$	$\nu(\{C, D, E\}) = 9$	$\nu(\{A, C, E, F\}) = 14$
$\nu(\{B, D\}) = 8$	$\nu(\{A, B, F\}) = 13$	$\nu(\{B, C, E, F\}) = 14$
$\nu(\{C, D\}) = 9$	$\nu(\{A, C, F\}) = 14$	$\nu(\{A, D, E, F\}) = 13$
$\nu(\{A, E\}) = 7$	$\nu(\{B, C, F\}) = 14$	$\nu(\{B, D, E, F\}) = 13$
$\nu(\{B, E\}) = 7$	$\nu(\{A, D, F\}) = 13$	$\nu(\{C, D, E, F\}) = 14$
$\nu(\{C, E\}) = 8$	$\nu(\{B, D, F\}) = 13$	$\nu(\{A, B, C, D, E\}) = 9$
$\nu(\{D, E\}) = 8$	$\nu(\{C, D, F\}) = 14$	$\nu(\{A, B, C, D, F\}) = 14$
$\nu(\{A, F\}) = 13$	$\nu(\{A, E, F\}) = 13$	$\nu(\{A, B, C, E, F\}) = 14$
$\nu(\{B, F\}) = 13$	$\nu(\{B, E, F\}) = 13$	$\nu(\{A, B, D, E, F\}) = 13$
$\nu(\{C, F\}) = 14$	$\nu(\{C, E, F\}) = 14$	$\nu(\{A, C, D, E, F\}) = 14$
$\nu(\{D, F\}) = 13$	$\nu(\{D, E, F\}) = 13$	$\nu(\{B, C, D, E, E\}) = 14$
$\nu(\{E, F\}) = 13$	$\nu(\{A, B, C, D\}) = 9$	$\nu(\{A, B, C, D, E, F\}) = 14$

Jugador	*Valor de Shapley*	*Valor de Banzhaf*
A	0.3667	0.0938
B	0.7667	0.2188
C	1.5667	1.1563
D	2.2667	1.4688
E	1.7667	0.9688
F	7.2667	6.4688

Los bajos valores para las poblaciones A y B se deben a que la mayoría de las trayectorias pasan por ellos, lo que induce a las demás poblaciones a asociarse con ellas. Nótese además, que a pesar de que al nodo F se le asigna más de la mitad del costo total, tiene una mejoría sustancial al no pagar las 13 unidades que le corresponden cuando juega aislado.

En el siguiente ejemplo se considera una muestra con la que se ha realizado una regresión múltiple. Se realiza una partición de la muestra y se define un índice sobre ella, que mida qué tan bueno es el ajuste de la regresión en cada uno de sus elementos.

Suponga que además de las variables que intervienen en la regresión, cada observación contiene otra variable Z que sólo puede tomar un número finito de valores, digamos $Z \in \{z_1, \ldots, z_n\}$. El objetivo que se persigue es detectar si el ajuste de la regresión depende de la variable Z.

Sea $N = \{N_1, \ldots, N_n\}$ la partición de la muestra, donde N_i es el conjunto de observaciones tales que $Z = z_i$. Se desea distribuir el coeficiente de correlación entre los elementos de la partición, para ello se define $v(S)$, para cada $S \subseteq N$, como el coeficiente de correlación que se obtiene al hacer la regresión con sólo las observaciones que están en S.

Así, un $\psi_i(v)$ chico con respecto a los demás indicaría un ajuste peor para las observaciones donde $Z = z_i$. Si $z_1 \leq z_2 \leq \ldots, \leq z_n$ y $\psi_i(v)$ decrece conforme i crece, el ajuste no sería tan bueno para valores grandes de Z como lo es para valores chicos.

Con la muestra que se da a continuación, se realizó una regresión múltiple, con el ozono como variable dependiente, y la velocidad del viento y la radiación solar como variables independientes. Para definir la variable Z, en N_1 se incluyeron las seis observaciones con temperaturas más bajas, en N_2 las seis que le siguieron, y así sucesivamente.

	Ozono	*Temperatura*	*Velocidad del viento*	*Radiación solar*
1	41	67	7.4	190
2	36	72	8.0	118
3	12	74	12.6	149
4	18	62	11.5	313
5	23	65	8.6	299
6	19	59	13.8	99
7	8	61	20.1	19
8	16	69	9.7	256
9	11	66	9.2	290
10	14	68	10.9	274
11	18	58	13.2	65

continúa

12	14	64	11.5	334
13	34	66	12.0	307
14	6	57	18.4	78
15	30	68	11.5	322
16	11	62	9.7	44
17	1	59	9.7	8
18	11	73	16.6	320
19	4	61	9.7	25
20	32	61	12.0	92
21	23	67	12.0	13
22	45	81	14.9	252
23	115	79	5.7	223
24	37	76	7.4	279

A continuación se presenta el juego, el valor de Shapley y el valor de Banzhaf que se obtuvieron. La solución muestra que se obtiene un peor ajuste relativo para las temperaturas más altas.

$$\begin{aligned}
v(\{A\}) &= 0.9480\\
v(\{B\}) &= 0.8963\\
v(\{C\}) &= 0.8598\\
v(\{D\}) &= 0.7990\\
v(\{A, B\}) &= 0.8009\\
v(\{A, C\}) &= 0.7414\\
v(\{B, C\}) &= 0.8408\\
v(\{A, D\}) &= 0.7393\\
v(\{B, D\}) &= 0.6796\\
v(\{C, D\}) &= 0.7017\\
v(\{A, B, C\}) &= 0.7857\\
v(\{A, B, D\}) &= 0.6389\\
v(\{A, C, D\}) &= 0.6539\\
v(\{B, C, D\}) &= 0.6749\\
v(\{A, B, C, D\}) &= 0.6413
\end{aligned}$$

Jugador	*Valor de Shapley*	*Valor de Banzhaf*
A	0.1939	0.0622
B	0.1902	0.0644
C	0.1768	0.0497
D	0.0804	-0.0430

Bibliografía

Aumann, R. J. y L. S. Shapley (1974). *Value of Non-Atomic Games*, Princeton, Princeton University Press.

Dubey, P. (1975). "On the Uniqueness of the Shapley Value", *International Journal of Game Theory*, vol. 4, pp. 131-139.

———, A. Neyman y Weber (1981). "Value Theory Without Efficiency", *Mathematics of Operations Research*, vol. 6, núm. 1, pp. 122-128.

Ichiishi, T. (1983). *Game Theory for Economic Analysis*, Academic Press.

Kalai, E, y D. Samet (1987). "On Weighted Shapley Values", *International Journal of Game Theory*, vol. 16, núm. 3, pp. 205-222.

Lawler, E. L. (1976). *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston.

Lehrer, E. (1988). "An Axiomatization of the Banzhaf Value", *International Journal of Game Theory*, vol. 17, núm. 2, pp. 89-99.

Owen, G. (1978). "Characterization of the Banzhaf-Coleman Index", SIAM *Journal of Applied Mathematics*, vol. 35, núm. 2, pp. 315-327.

Riordan, J. (1978). *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Princeton, Princeton University Press.

Shapley, L. S. (1953). "A Value for n-Person Games", *Contribution to the Theory of Games*, vol. 2, pp. 307-317.