

**CUANTIFICACIÓN DE LA PÉRDIDA
DE BIENESTAR ASOCIADA
A LA IMPOSICIÓN DE RESTRICCIONES
EN LA OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS
DE LAS ADMINISTRADORAS DE FONDOS
DE RETIRO**

Elvio Accinelli
Alfredo Piria
Raúl Tempone

Universidad de la República Oriental del Uruguay

Resumen: Las restricciones impuestas por organismos reguladores al diseño de carteras de administradoras de fondos de retiro, pretenden evitar un comportamiento oportunista de dichas administradoras. No obstante, estas restricciones conllevan pérdida de bienestar por parte de los ahorradores. En el presente trabajo se cuantifica, en forma numérica, la pérdida de bienestar asociado a posibles limitaciones. Para ello, se utilizan técnicas de programación matemática, que permiten a la vez obtener en forma rápida portafolios óptimos. Se presenta un ejemplo numérico para ayudar a entender el efecto de las restricciones.

Abstract: The restrictions imposed by the regulatory authorities on the composition of retirement-fund portfolios are aimed at avoiding opportunistic behavior on the part of retirement-fund managers. However, these restrictions reduce the welfare of the shareholders of such funds. In this paper, the welfare loss associated with different possible restrictions is quantified. In order to do this, we apply efficient mathematical programming techniques to quickly obtain optimal portfolios given these exogeneous constraints. We include a numerical example in order to make the effect of such constraints more clear.

1. Introducción

En el problema que enfrenta una administradora de fondos de retiro al diseñar su portafolio óptimo de inversiones, existen restricciones externas sobre su posible composición impuestas por un organismo regulador central, las cuales pueden tener distintos motivos, entre ellos evitar el comportamiento oportunista por parte de las administradoras, o la captación de inversiones en un determinado tipo de activos de interés de la entidad reguladora. La imposición de las restricciones conlleva una desviación de la frontera de eficiencia, con la consecuente pérdida de bienestar individual y social, medida en términos del riesgo que los ahorradores son obligados a asumir. Usualmente la pérdida no es cuantificada en el momento de definir las restricciones.

En este trabajo se muestra la posibilidad de realizar dicha cuantificación, comparando el impacto de la imposición de un tipo de restricción frente a otro. Para ello, se define un conjunto de índices, que se calculan en forma numérica, una vez encontrada la frontera de eficiencia. No se pretende recomendar un tipo u otro de restricción ya que, si ese fuera el caso, se debería disponer de un modelo matemático de los objetivos del regulador.

Se presenta el modelo clásico de optimización de portafolios, con esperanza dada y minimización del riesgo, en el marco de dos modelos: uno con activo libre de riesgo y otro sin él.

A continuación, se abandona el modelo clásico y nos introducimos en un modelo donde una autoridad central impone restricciones. Se analiza la situación creada cuando la aseguradora pretende optimizar su cartera y, como antes, se consideran dos modelos: con y sin activo libre de riesgo. Un algoritmo computacional permite obtener en forma rápida las fronteras de eficiencia.

Para uno y otro caso (con y sin restricciones exógenas) las curvas obtenidas son convexas, sin embargo, mientras la primera es diferenciable en todo punto, la segunda presenta puntos angulosos. En modelos con presencia de activos libres de riesgo, la clásica recta también cambia por una curva convexa no regular.

Se comparan las dos situaciones, mostrando la pérdida de bienestar que la imposición de restricciones implica, y se definen cuatro índices para medirla. Los dos primeros calculan la diferencia entre las situaciones con y sin restricciones impuestas, el tercero la sensibilidad al cam-

bio en las restricciones y el cuarto muestra que el valor marginal por una unidad adicional de retorno esperado, en términos de riesgo deja de ser constante, para obtener sólo validez local cuando se trata de un problema con restricciones exógenas.

Finalmente, se presenta un ejemplo explicativo de las dos situaciones mencionadas, donde se compara el precio que en términos de riesgo debe pagar la sociedad por una u otra posible restricción.

En un anexo se presentan los cálculos más detallados.

2. El problema

Nuestro interés es analizar el comportamiento de un agente (por ejemplo, una administradora de fondos de pensión) cuando intenta crear una cartera, con preferencias sobre retorno esperado y aversión a la variancia.

En el caso que nos ocupa, el vector $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de variables de decisión representará un portafolio, siendo x_i , con $i = (1, 2, \dots, n)$ el porcentaje del activo i que compone el portafolio o cartera x .

Para un portafolio x dado, el valor esperado del retorno (asociado al vector aleatorio \tilde{e} con vector de esperanzas e) queda definido como $E(x) = \sum_{i=1}^n e_i x_i = e^T x$, y la variancia asociada es $var(x) = \frac{1}{2} x^T V x$, donde $\frac{1}{2} V$ representa la matriz de varianzas y covarianzas asociadas a \tilde{e} . Consideraremos el valor $var(x)$ como el riesgo asociado al portafolio x , y usaremos la notación σ^2 para referirnos a ella.

El agente intenta conformar una cartera con un retorno esperado E dado, conociéndose el retorno esperado e_i de cada uno de los n activos existentes en el mercado. Entre dos portafolios x , e y con igual valor esperado ($E(x) = E(y)$), se elegirá aquel con menor variancia, es decir $x \geq y$, si y sólo si $var(x) \leq var(y)$.

El programa para este agente corresponde a una minimización cuadrática con restricciones lineales y se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma^2(E) &= \min \frac{1}{2} x^T V x \\ \text{s.a: } & e^T x = E \\ & \mathbf{1}^T x = 1 \\ & a_j^T x \leq b_j, \quad j \in J \end{aligned} \quad (1)$$

La primera restricción dice que debemos limitarnos a considerar aquellos portafolios que tengan el valor E como retorno esperado. La segunda, muestra que optimizamos el porcentaje de cada activo en el portafolio o cartera que creamos a partir de éstos. Finalmente, se ha incluido un conjunto J de restricciones de desigualdad para contemplar el caso general de este trabajo. Dicho conjunto J puede ser vacío en la formulación más simple.

2.1. Caso sin restricciones externas

Presentamos aquí el modelo clásico, C. Huang, R. Litzenger (1993), con objeto de comparar sus resultados con los del modelo más general que estudiaremos adelante, y de verificar las bondades de nuestro algoritmo de cálculo. Sus limitaciones sobre las funciones de utilidad individual son conocidas, pero su tratamiento matemático y popularidad en la teoría de finanzas nos lleva a su consideración.

2.1.1. Caso en el que no existe un activo libre de riesgo

Aunque es idéntico el tratamiento matemático del problema, que incluye o no un activo libre de riesgo, aquí los diferenciamos ya que sus soluciones cualitativas son distintas.

En esta subsección nos limitaremos a la formulación del problema sin activo libre de riesgo. Con la notación siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma^2(E) &= \min \frac{1}{2} x^T \mathbf{V} x \\ \text{s.a: } e^T x &= E \\ \mathbf{1}^T x &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

y su solución óptima es (ver anexo):

$$\sigma^2(E) = \frac{1}{2} [E, 1]^T \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

donde la matriz \mathbf{P} está dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^T \mathbf{V}^{-1} e & e^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} e & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Esta solución corresponde a una parábola en un diagrama que relaciona riesgo y valor esperado.

Dicha curva representa la frontera de eficiencia. Lo anterior nos dice que no existen puntos (portafolios) en el plano σ^2, E (varianza, valor esperado) con mayor retorno esperado para un nivel de riesgo dado, que los determinados por la curva de eficiencia.

2.1.2. Caso en el que existe un activo libre de riesgo

Las técnicas de cálculo para esta subsección son análogas a las de la anterior, debiendo cambiarse la restricción de retorno esperado dado del programa anterior por:

$$x^T e + (1 - x\mathbf{1})e_f = E. \quad (4)$$

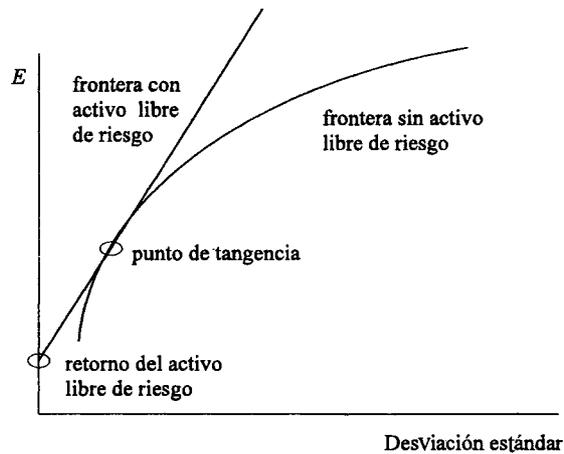
Aquí x representa el vector de inversiones en activos con riesgo, siendo e el vector de retornos esperado de dichos activos. Por otra parte, e_f es el retorno del activo sin riesgo y $(1 - x\mathbf{1})$ el porcentaje invertido en él. La solución para este problema está ampliamente tratada en la bibliografía. Su frontera de eficiencia es una parábola en el plano σ^2, E (varianza del retorno, valor esperado del retorno), mientras que en el plano σ, E (desviación estándar del retorno, valor esperado del retorno) es una recta, que también se muestra en la figura 1. Como es bien conocido, dicha recta tiene ordenada en el origen e_f y es tangente a la frontera de eficiencia del problema presentado en la subsección 2.1.1.

3. Programa con restricciones impuestas por agentes externos

En el caso de fondos de previsión a las restricciones naturales de un programa de maximización de activos (retorno esperado prefijado y suma de porcentajes igual a 1), debemos agregarle aquellas que impone la autoridad central. La cual persigue sus objetivos propios, no necesariamente coinciden con los de la aseguradora, los que por otra parte, como ya se mencionó, muchas veces intentan prevenir conductas oportunistas.

Las restricciones adicionales, al limitar el dominio en el que se resolverá el problema, hacen que, para valores esperados iguales, se deba asumir más riesgo en el caso con restricciones, que sin ellas. Definimos este aumento en el riesgo como pérdida de bienestar social.

Gráfica 1
Frontera de eficiencia en ausencia de activo libre de riesgo (hipérbola) y en su presencia (recta)



En el modelo las restricciones adicionales son consideradas como externalidades, que modifican la estructura del problema. La frontera de eficiencia presentará cambios en su regularidad, no obstante mantener su convexidad como se prueba en la proposición 1 del apéndice C.

Como en la sección anterior, consideraremos dos situaciones diferentes: minimización de una función cuadrática con restricciones impuestas por la autoridad central, en ausencia y en presencia de un activo sin riesgo en el mercado de activos.

3.1. Modelo con restricciones y sin activo libre de riesgo

A diferencia de la situación en la que no existen restricciones, la frontera de eficiencia no se presenta como una curva regular. Si bien se mantiene su convexidad se pierde la diferenciabilidad, aunque no como propiedad

genérica. La frontera ahora será una unión de arcos de curvas simples, como se explicará a continuación.

Con el propósito de mantener la simplicidad de la exposición, asumiremos que las restricciones lineales de desigualdad son solamente del tipo de cotas en las variables x_i . Esto se puede hacer sin perder generalidad, ya que el caso general que nos ocupa puede reescribirse con restricciones de cotas luego de un cambio de variables.

Haremos ahora un razonamiento de tipo teórico para mostrar la dependencia de la varianza mínima respecto del retorno esperado E . En el vector óptimo X varias de las restricciones adicionales son efectivas, lo cual implica que algunas variables, porcentajes posibles de algunos activos en la cartera o portafolio, tomen los valores límites. Este conjunto de variables, llamado conjunto activo, no es conocido a priori, pero para nuestro argumento es suficiente con su existencia, y el hecho de que el mismo se modifica una cantidad finita de veces al variar el parámetro retorno esperado E .

Dado el conjunto activo en nuestro modelo diremos que hay variables libres, esto es, que no alcanzan sus cotas impuestas. Denotaremos este subvector como X_1 . Por X_2 denotaremos el subvector de variables que toman valores en sus cotas. La gráfica 2 muestra esta situación, comparándose esta frontera de eficiencia con la encontrada para el caso sin restricciones y sin activo libre de riesgo.

El programa de optimización correspondiente se puede ver en el apéndice C. Discutiremos en lo que sigue las características de la solución. Supongamos que los valores de las variables comprendidas en el conjunto X_2 estén limitados por l como valor inferior y b como superior, ¿cuáles de estas variables alcanzarán uno u otro valor? ello dependerá de cuál sea el valor retorno esperado E del portafolio.

Tal como mencionamos con anterioridad, usaremos la notación:

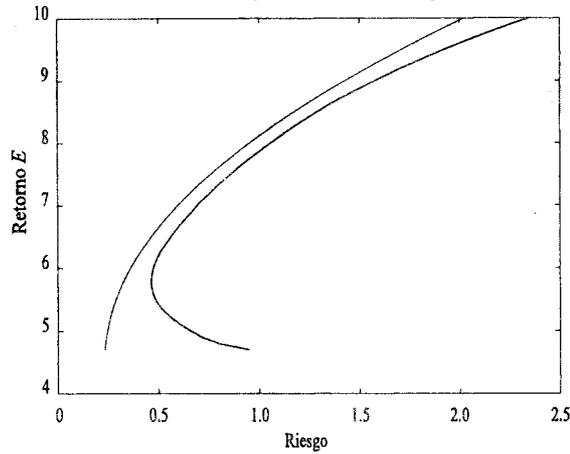
$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}; \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{1}_2 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, la matriz \mathbf{V} quedará representada por los siguientes bloques:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_{21}$.

Gráfica 2
*Frontera eficiente en el plano σ^2, E^**
 Fronteras con y sin restricciones impuestas



* Al imponer restricciones deja de ser una parábola.

De esta manera el programa de minimización del riesgo es:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \frac{1}{2} X_1^T V_{11} X_1 + (V_{12} X_2)^T X_1 + \frac{1}{2} X_2^T V_{22} X_2 \\ & \text{s.a: } \begin{cases} e_1^T X_1 = E - e_2^T X_2 = \bar{E} \\ \mathbf{1}_1^T X_1 = 1 - \mathbf{1}_2^T X_2 = \bar{1} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

En donde X_2 es una constante, pues se supone que alguna de las cotas se ha alcanzado.

El valor óptimo para este caso es $\sigma^2(E)$

$$\sigma^2(E) = \frac{1}{2} [\bar{E}, \bar{1}] P_{11}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_1^T \\ \mathbf{1}_1^T \end{bmatrix} V_{11}^{-1} V_{12} X_2$$

$$+ \frac{1}{2} X_2^T V_{12}^T V_{11}^{-1} [e_1, \mathbf{1}_1] P_{11}^{-1} \begin{bmatrix} e_1^T \\ \mathbf{1}_1^T \end{bmatrix} V_{11}^{-1} V_{12} X_2$$

donde

$$P_{11} = \begin{bmatrix} e_1^T V_{11}^{-1} e_1 & e_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 \\ e_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 & \mathbf{1}_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 \end{bmatrix}$$

3.2. Optimización con restricciones en presencia de un activo libre de riesgo

Al proceder de manera totalmente análoga a lo realizado en la subsección 2.1.2, agregamos el activo libre de riesgo a la formulación propuesta en la subsección 3.1.

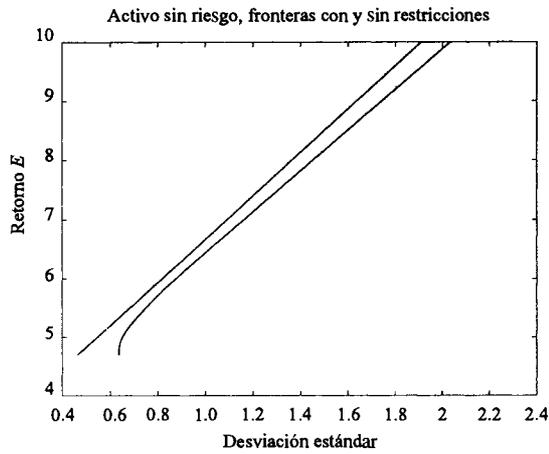
A diferencia de la solución obtenida en el problema sin restricciones, la frontera de eficiencia ya no será representada por una recta en el plano (desvío estándar, retorno), sino que ahora obtenemos una curva, tal como se muestra en las gráficas 3a y 3b. Por este motivo se pierde el precio constante en término de riesgo adicional, que se obtenía anteriormente. Ahora este precio es sólo local, cuya medida es el valor de la pendiente de la recta tangente a la frontera en cada punto de ésta.

En la gráfica 4 se muestran las fronteras para el caso con restricciones, al comparar las curvas correspondientes con y sin activo libre de riesgo. Se puede observar que ambas curvas son tangentes como en el caso sin restricciones. También tenemos que, debido a la imposición de una cantidad mínima de algunos activos con riesgo en la composición del portafolio, la frontera no alcanza un punto con riesgo cero.

En los puntos angulosos de la nueva frontera, el incremento de valor esperado en función del riesgo sufre una abrupta caída.

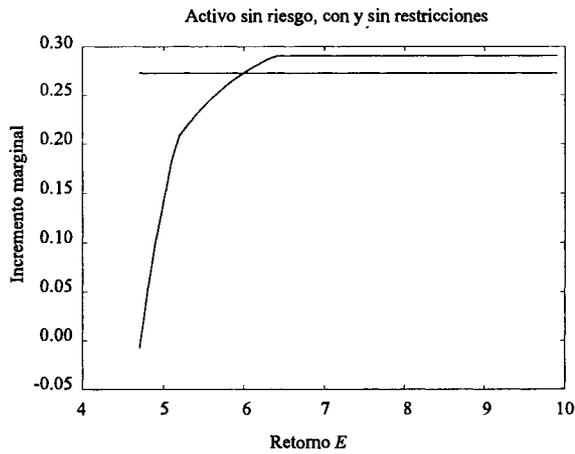
Como se muestra en las gráficas 3a y 3b, el precio que debe pagarse en términos de riesgo para incrementar el retorno esperado es creciente con respecto al riesgo asumido. Esto es, agentes más adversos al riesgo, deberán pagar menos que los más propensos a él, para incrementar en una unidad su retorno esperado. Entendemos, como se muestra en la proposición 2 del apéndice, que los agentes que eligen portafolios con mayor valor esperado asumen riesgos más altos. En las gráficas se compara la curva de precios mencionada con la que corresponde al caso sin restricciones, en la que por ser la frontera una recta, ese precio es constante para cualquier nivel de retorno esperado.

Gráfica 3a
*Frontera eficiente en el plano σ, E^**



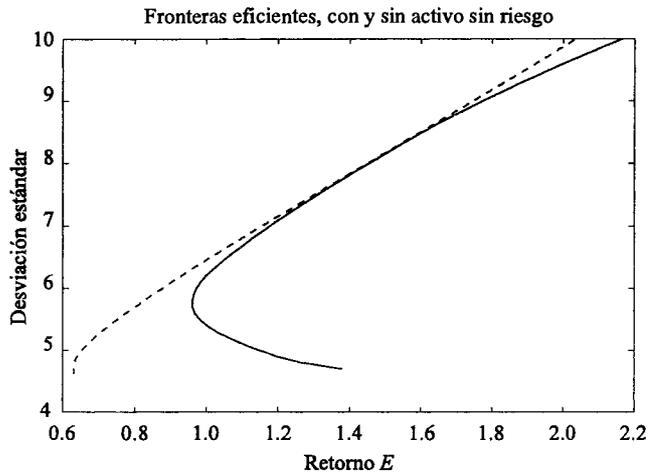
* Al imponer restricciones deja de ser una recta. Aunque sigue siendo una curva convexa ahora presenta puntos angulosos.

Gráfica 3b
*Riesgo adicional**



* Éste debe asumirse para incrementar en una unidad el valor esperado del retorno, el cual se representa en las abscisas.

Gráfica 4
*Fronteras con restricciones en el plano σ, E^**



* Se compara el caso en el que existe un activo libre de riesgo con aquel en el que no existe.

4. Índices para medir la pérdida de bienestar

Con el fin de medir la pérdida de bienestar asociada a la imposición de restricciones, se definirán cuatro índices. Por pérdida de bienestar entendemos el aumento del riesgo necesario para obtener un mismo valor esperado del retorno asociado a la cartera.

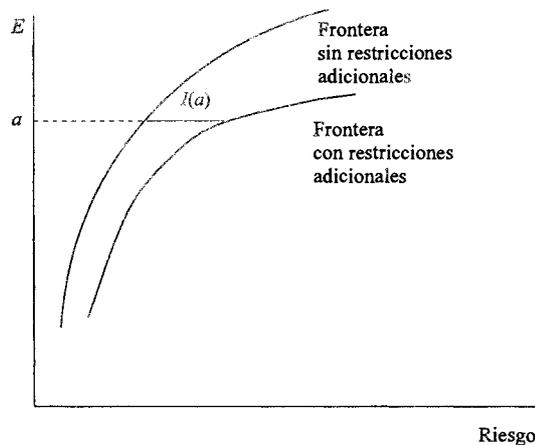
A cada conjunto J de restricciones asociamos una curva de eficiencia representada por una función $F_J: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $F_J(E) = \sigma^2$, que relaciona el valor esperado E de retorno con el riesgo mínimo σ^2 que es necesario asumir, obtenido a partir de la resolución del problema de optimización ya presentado. Indicaremos por F la función correspondiente al caso sin restricciones.

Dado un conjunto de restricciones J , definimos el primer índice I_1 de comparación como:

$$I_1(E) = F_J(E) - F(E).$$

Este índice señala la pérdida de bienestar para un retorno E dado, asociada a la imposición del conjunto J de restricciones, como se muestra en la gráfica 5. Un valor I_1 elevado indica que el regulador deberá prestar particular atención a la definición del conjunto de restricciones J , pues su imposición implica un incremento de riesgo importante para el nivel de retorno E considerado.

Gráfica 5
Índice I_1 , la diferencia en riesgo a valor esperado fijo

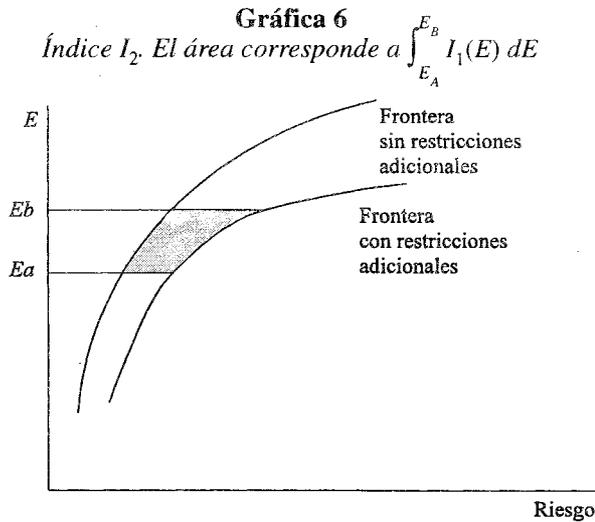


También puede interesar medir la pérdida de bienestar asociada a todo un intervalo $[E_A, E_B]$ en el que se supone que la administradora puede trabajar. En este caso es natural considerar el siguiente índice, que se muestra gráficamente en la gráfica 6:

$$I_2([E_A, E_B]) = \frac{1}{E_B - E_A} \int_{E_A}^{E_B} I_1(E) dE.$$

Este índice es un valor promedio correspondiente a un espectro posible de valores esperados de retorno. Es de especial interés cuando existe una banda limitante del retorno E en el momento del diseño del portafolio.

Los índices anteriores comparan incrementos de riesgo cuando se introducen restricciones. Asimismo, es importante estudiar el comportamiento de la solución del problema ante la perturbación de uno de los segundos miembros b_j ($j \in J$) de un conjunto J de restricciones fijo. La sensibilidad del riesgo σ^2 está directamente dada por el correspondiente multiplicador de Lagrange λ_j , observándose que aquellas restricciones con mayor valor del multiplicador son críticas en el sentido que reducen el uso de activos de bajo riesgo y retorno interesante.



Para analizar la sensibilidad del retorno esperado E frente a una perturbación en b_j (para un nivel de riesgo σ^2 dado), podemos usar el siguiente índice:

$$I_3(\sigma^2) = \frac{\partial E(\sigma^2)}{\partial b_j},$$

donde $E(\sigma^2) = F_j^{-1}(\sigma^2)$ es decir que $E(\sigma^2)$ es el retorno esperado que es necesario imponer para obtener σ^2 como valor mínimo en el problema considerado de optimización con restricciones. Este índice puede calcularse a partir de la pendiente de la función F_j y del valor del multiplicador

de Lagrange λ_j asociado a la restricción j en el problema de minimización:

$$I_3(\sigma^2) = \frac{\partial E}{\partial(\sigma^2)} \frac{\partial \sigma^2}{\partial b_j} = \frac{1}{\frac{\partial \sigma^2}{\partial E}} \frac{\partial \sigma^2}{\partial b_j} = \frac{1}{F'_j} \lambda_j$$

Un valor alto de I_3 indica una pérdida importante en el retorno esperado ante un endurecimiento marginal de la restricción j .

En el caso sin restricciones, en presencia de un activo libre de riesgo, la relación incremento valor esperado-riesgo, $p = \frac{\Delta E}{\Delta \sigma}$, se mantiene constante. Este valor es conocido como la pendiente de la recta frontera en el modelo CAPM. Al imponer un conjunto J de restricciones adicionales, como ya se mencionó, la frontera eficiente se deforma y el valor p pasa a tener un comportamiento local, $p_j(E) = \frac{\partial E}{\partial \sigma}$, que está dado por la pendiente de la tangente a la frontera de eficiencia $E(\sigma)$ en los puntos en que la frontera es diferenciable.

El índice que se propone para cuantificar el efecto de las restricciones en el precio del riesgo es:

$$I_4(E) = p - p_j(E) = p - \frac{\partial E}{\partial \sigma} = p - \frac{2\sigma(E)}{F'_j(E)}$$

En el caso no diferenciable existe una discontinuidad en la pendiente, presentando el precio en cuestión un salto hacia abajo.

Este índice mide el premio por riesgo, es decir, el incremento en valor esperado que debería pagarse al inversionista que es obligado a asumir una unidad de riesgo adicional por la imposición de restricciones.

5. Ejemplo numérico

El siguiente ejemplo muestra como, la imposición de restricciones adicionales implica una pérdida en la utilidad del inversionista, en la medida que mantenga el objetivo de minimizar el riesgo.

Se consideran 10 activos posibles para componer una cartera, cuyos retornos se distribuyen normalmente y se muestran en la tabla 1. La matriz de varianzas y covarianzas \mathbf{V} se muestra en la tabla 2.

La fuente de los datos considerados es el Banco Central de Uruguay.

Tabla 1
Vector e de retornos esperados

6.4	7.7	8.9	4.7	5.2	18.9	21.4	18.6	18.1	9.2
-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	-----

Tabla 2
Matriz V de varianzas y covarianzas

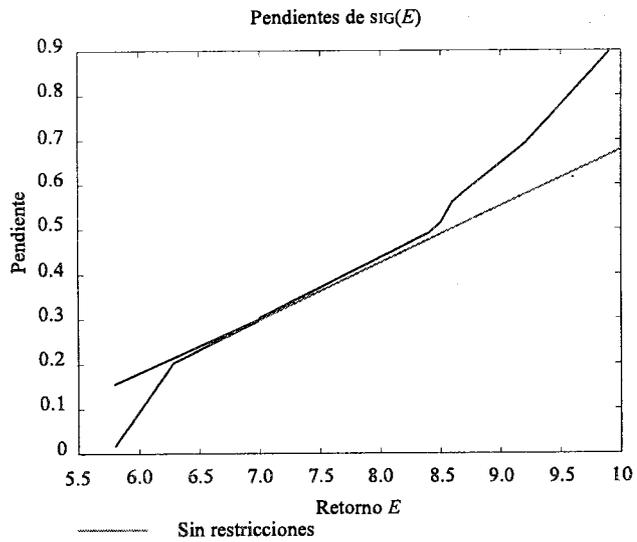
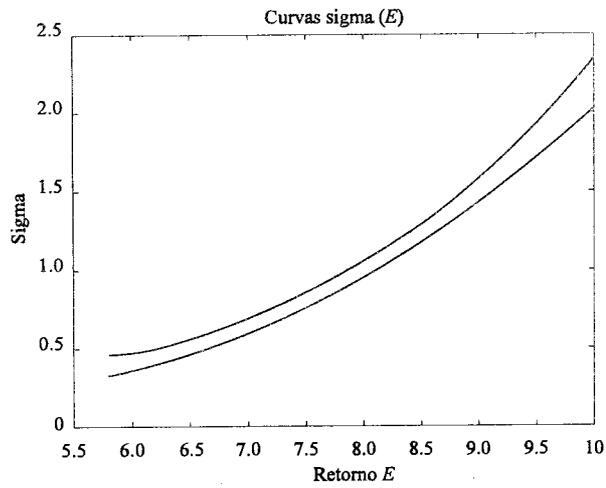
4.2	-4.3	3.0	2.6	1.1	-11.2	-2.7	-7.6	-12.7	13.3
-4.3	54.5	4.3	-3.7	22.4	35.0	14.6	21.5	37.5	15.6
3.0	-4.3	27.9	2.0	0.0	-11.7	2.0	-3.4	-13.3	75.4
2.6	-3.7	2.0	1.9	0.5	-8.7	-2.9	-6.2	-9.6	8.5
1.1	22.4	0.0	0.5	24.0	2.3	-4.8	-5.9	3.2	-54.9
-11.2	35.0	-11.7	-8.7	2.3	122.1	70.0	83.9	119.0	52.8
-2.7	14.6	2.0	-2.9	-4.8	70.0	68.4	70.7	67.2	-37.9
-7.6	21.5	-3.4	-6.2	-5.9	83.9	70.7	83.9	82.6	-2.7
-12.7	37.5	-13.3	-9.6	3.2	119.9	67.2	82.6	120.3	93.0
13.3	15.6	75.4	8.5	-54.9	-52.8	-37.9	-2.7	-93.0	9111.4

En este caso particular, se consideran como restricciones impuestas por la autoridad central, no negatividad en todos los activos, y la obligación de invertir más del 60% en los activos 1, 3, 4. Esto es un ejemplo para mostrar las posibilidades del algoritmo de cálculo.

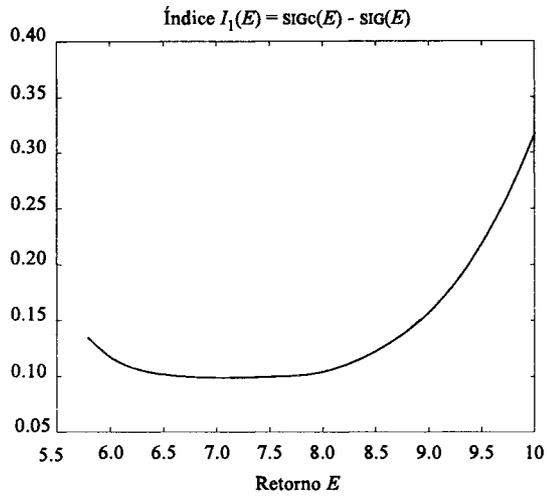
En la gráfica 7 se muestra la frontera de eficiencia en el ejemplo numérico estudiado (curva superior), junto con la frontera obtenida correspondiente al modelo CAPM sin restricciones (curva inferior), que es la misma que en la gráfica 2. La curva superior muestra como agregar las condiciones en las variables (activos) del problema, supone un aumento de riesgo para el inversionista. También se muestran las respectivas derivadas. En el caso del modelo CAPM la curva es una parábola y la derivada es una recta. En el ejemplo, la curva está compuesta por arcos de parábola y su derivada es lineal a trazos.

En la gráfica 8, se muestra el índice I_1 para diferentes valores del retorno esperado E . La gráfica 9, muestra la sensibilidad respecto de una de las restricciones impuestas: la de no negatividad del porcentaje x_5 invertido en el activo número 5. Se muestra el multiplicador de Lagrange del problema de optimización, que representa el riesgo adicional que debe estar dispuesto a asumir un inversionista en caso de aumentar la cota inferior de x_5 . También se muestra el índice 3, que representa la disminución en el retorno esperado correspondiente:

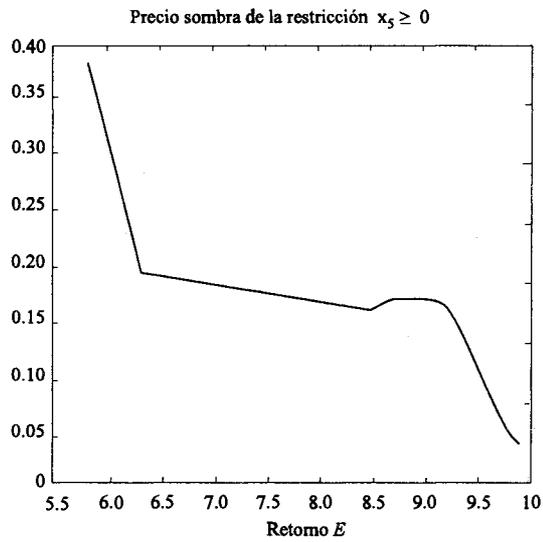
Gráficas 7a y 7b
Curvas de eficiencia en el plano σ^2 , E y sus derivadas



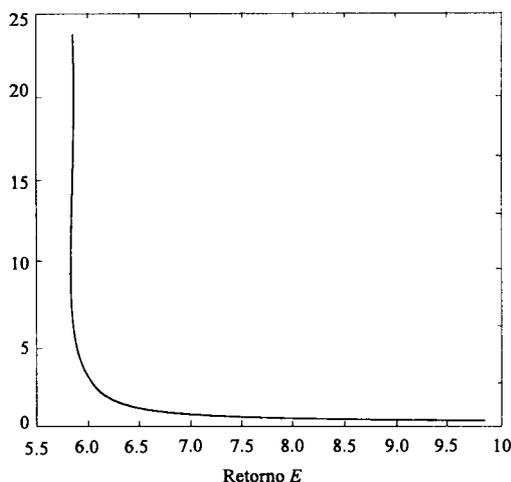
Gráfica 8
Resultados del índice I_1 en el ejemplo numérico



Gráfica 9a
Sensibilidad respecto de la restricción $x_5 \geq 0$ del riesgo σ^2



Gráfica 9b
Sensibilidad respecto de la restricción $x_5 \geq 0$
del retorno esperado E , que es el índice 3
 Índice $I_3(E)$



6. Conclusiones

En este trabajo se logra cuantificar la relación retorno esperado-riesgo en presencia de restricciones adicionales. Cabe entonces la pregunta acerca de la posible existencia de mejores oportunidades de inversión para el ahorrador si diversifica las oportunidades de inversión.

Así, por ejemplo, al crearse diversos tipos de aseguradoras que contemplen diferentes actitudes frente al riesgo, o bien la posibilidad de que una aseguradora presente un producto diferenciado, hecho que cobra sentido en función de la existencia de diversas actitudes hacia el riesgo, particularmente motivada por la diferencia de edad o ingresos.

La convexidad de la frontera de eficiencia, muestra que en el caso de una inversión diversificada en portafolios de distinto valor esperado de retorno, se obtiene un riesgo menor al promedio de los riesgos correspondientes a los portafolios considerados.

La no diferenciabilidad de la frontera implica la existencia de intervalos separados por los puntos angulosos, donde el precio del riesgo es una función continua.

Ahorrradores menos propensos al riesgo elegirán portafolios cuyos componentes riesgo-valor esperado se sitúan antes de los correspondientes al punto anguloso, ahorradores con menor aversión al riesgo elegirán portafolios cuyo riesgo sobrepasa al correspondiente al del punto anguloso. De esta manera se pueden presentar ofertas diferenciadas, y el algoritmo de cálculo presentado en el trabajo permite obtener este valor frontera.

La convexidad de la frontera muestra que para obtener un incremento de una unidad de valor esperado de retorno, inversionistas aversos al riesgo deben de asumir un precio, relativo en términos de riesgo, menor que los inversionistas propensos al riesgo, al haber elegido estos últimos, un portafolio cuyo riesgo es mayor.

Por otra parte, la fuerte influencia que la imposición de restricciones por parte de los agentes reguladores tiene sobre el bienestar social, evidencia la necesidad de cuantificar ésta y buscar aquellas que minimicen su impacto. Esto es posible hacerlo en forma numérica en casos concretos, tanto al comparar diversos conjuntos posibles de restricciones que conlleven un mismo objetivo, como ante un conjunto dado de restricciones. Se puede mostrar en cual de ellas un incremento en el segundo miembro de la restricción es más costosa en términos del riesgo que se obliga a asumir.

Bibliografía

- Gill, P. E., W. Murray y M. H. Wright (1981). *Practical Optimization*, Academic Press.
- Huang, C., y R. Litzenberger (1993). *Foundations for Financial Economics*, Prentice-Hall International.

Apéndices

A. Minimización cuadrática con restricciones lineales

El modelo que se presenta a continuación es clásico en la literatura y de amplia utilización. El objetivo de la presentación de este modelo es el de dar un marco genérico a nuestro problema concreto.

Se trata de un programa en el que se minimiza una función objetivo, cuadrático, con restricciones lineales de igualdad, la referencia general para este tipo de problemas es P. E. Gill, W. Murray y M. H. Wright (1981):

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) \\ \text{s.a: } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (6)$$

Aquí $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^m$, A es una matriz de n columnas por m filas.

Si F es un funcional convexo y derivable, para el valor \mathbf{x}^* el gradiente del Lagrangiano evaluado en el óptimo $\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ debe anularse, además de cumplirse la restricción, esto es, deben verificarse las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) + A^T \lambda^* = 0. \\ A\mathbf{x}^* - \mathbf{b} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

En el caso particular de un problema cuadrático el funcional f presenta la siguiente forma:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}H\mathbf{x} + c^T\mathbf{x}.$$

En correspondencia:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} + c,$$

que debe satisfacer el óptimo, \mathbf{x}^* :

$$\begin{cases} H\mathbf{x}^* + c + A^T \lambda^* = 0. \\ A\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \end{cases} \quad (8)$$

En forma matricial el sistema (8) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

B. Modelo sin restricciones impuestas

El programa para este agente se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 f(x^*) &= \min \frac{1}{2} x^T \mathbf{V} x \\
 \text{s.a: } e^T x &= E \\
 \mathbf{1}^T x &= 1
 \end{aligned} \tag{9}$$

Las condiciones de optimalidad para este problema son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} & e & \mathbf{1} \\ e^T & 0 & 0 \\ \mathbf{1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Donde \mathbf{V} representa la matriz de covarianzas, λ y μ son los multiplicadores asociados a la primera y segunda restricción respectivamente.

La primera restricción dice que debemos limitarnos a considerar aquellos portafolios tales que tengan el valor E como retorno esperado. La segunda, muestra que optimizamos el porcentaje de cada activo en el portafolio o cartera que creamos a partir de éstos. Los activos son n , preexistentes, y su retorno esperado es, respectivamente, e_i , $i = (1, 2, \dots, n)$.

A partir de las condiciones de optimalidad (10) obtenemos para el portafolio óptimo la siguiente identidad:

$$x^* = -(\mu^* \mathbf{V}^{-1} e + \lambda^* \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}) \tag{11}$$

Al sustituir este valor en las restricciones obtendremos la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} e^T \mathbf{V}^{-1} e & e^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} e & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Al considerar

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^T \mathbf{V}^{-1} e & e^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} e & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

obtenemos para λ y μ óptimos los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = -\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Sean \mathbf{e}^1 y \mathbf{e}^2 los elementos de la base canónica de \mathfrak{R}^2 , se obtiene entonces:

$$\mu = -\mathbf{e}^{1T} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\lambda = -\mathbf{e}^{2T} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Luego el portafolio óptimo, si sustituimos en (11) obtendremos la siguiente expresión:

$$x^* = \left(\mathbf{e}^{1T} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{V}^{-1} e + \mathbf{e}^{2T} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \quad (15)$$

Al sustituir en (9) obtenemos como valor de menor varianza:

$$f(x^*) = \frac{1}{2} [E, 1]^T \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

C. Modelo con restricciones

A continuación presentaremos el programa de optimización y discutiremos las características de la solución.

Supongamos que los valores de las variables comprendidas en el conjunto X_2 estén limitados por l como valor inferior y b como superior, cuáles de estas variables alcanzarán uno u otro valor, dependerá del valor del retorno esperado E del portafolio.

Haremos la notación siguiente:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{1}_2 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia la matriz V quedará representada por los siguientes bloques:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_{21}$.

De esta manera el programa de minimización del riesgo es:

$$\text{Min } \frac{1}{2} X_1^T \mathbf{V}_{11} X_1 + (\mathbf{V}_{12} X_2)^T X_1 + \frac{1}{2} X_2^T \mathbf{V}_{22} X_2 \quad (17)$$

$$\text{s.a: } \begin{cases} e_1^T X_1 = E - e_2^T X_2 \\ \mathbf{1}_1^T X_1 = 1 - \mathbf{1}_2^T X_2. \end{cases}$$

En este programa, X_2 es una constante, pues se supone que alguna de las cotas se ha alcanzado. En lo que sigue, usaremos las notaciones:

$$\bar{E} = E - e_2^T X_2$$

$$\bar{\mathbf{1}} = 1 - \mathbf{1}_2^T X_2.$$

Las condiciones de primer orden para este problema son las siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{11} X_1^* + \mathbf{V}_{12} X_2 + \lambda e_1 + \mu \mathbf{1}_1 = 0 \\ e_1^T X_1^* = \bar{E} \\ \mathbf{1}_1^T X_1^* = \bar{\mathbf{1}} \end{cases}$$

a partir de estas igualdades obtenemos:

$$\bar{E} + e_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} X_2 + \mu e_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} e_1 + \lambda e_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 = 0. \quad (18)$$

$$\bar{1} + \mathbf{1}_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} X_2 + \mu \mathbf{1}_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} e_1 + \lambda \mathbf{1}_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 = 0. \quad (19)$$

En forma matricial al despejar adecuadamente, y utilizando la simetría de la matriz \mathbf{V}_{11} obtenemos:

$$\begin{bmatrix} e_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} e_1 & e_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 \\ e_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 & \mathbf{1}_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} X_2 \\ \mathbf{1}_1^T \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} X_2 \end{bmatrix}.$$

Al llamar \mathbf{P}_{11} a la matriz que multiplica al vector de los multiplicadores en la ecuación anterior, el nuevo valor para $\sigma^2(E)$ será:

$$\begin{aligned} \sigma^2(E) &= \frac{1}{2} [\bar{E}, \bar{1}] \mathbf{P}_{11}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_1^T \\ \mathbf{1}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} X_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} X_2^T \mathbf{V}_{12}^T \mathbf{V}_{11}^{-1} [e_1, \mathbf{1}_1] \mathbf{P}_{11}^{-1} \begin{bmatrix} e_1^T \\ \mathbf{1}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^{-1} \mathbf{V}_{12} X_2. \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos arcos de parábola que se irán solapando, correspondientes a los diferentes valores que las variables acotadas vayan alcanzando, en función del valor esperado del retorno del portafolio. Como se observa en la gráfica 2, se pierde la anterior frontera para portafolios sin restricciones adicionales.

Convexidad de la frontera eficiente

Sea

$$\sigma^2(E) = \min \left\{ \frac{1}{2} X^T \mathbf{V} X, \text{ sujeto a: } e^T X = E, \mathbf{1}_1^T X = 1 \right\}.$$

PROPOSICIÓN 1. *El funcional $\sigma^2(\cdot)$ es convexo.*

PRUEBA.

$$\begin{aligned} &\sigma^2(\alpha E_1 + (1 - \alpha) E_2) \\ &= \min \left\{ \frac{1}{2} X^T \mathbf{V} X, \text{ sujeto a: } X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2, e^T X_1 = E_1, \right. \\ &\quad \left. \mathbf{1}_1^T X_1 = 1, e^T X_2 = E_2, \mathbf{1}_1^T X_2 = 1 \right\}, \end{aligned}$$

de la convexidad de la función objetivo se deduce ahora que:

$$\begin{aligned}
 & \sigma^2(\alpha E_1 + (1 - \alpha)E_2) \\
 & \leq \alpha \min\{\frac{1}{2} X_1^T \mathbf{V} X_1 : X_1 : e^T X_1 = \alpha E_1, \mathbf{1}_1^T X_1 = 1\} \\
 & + (1 - \alpha) \min\{\frac{1}{2} X_2^T \mathbf{V} X_2 : X_2 : e^T X_2 = \alpha E_2, \mathbf{1}_1^T X_2 = 1\} \\
 & \leq \alpha \sigma^2(E_1) + (1 - \alpha) \sigma^2(E_2) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

La siguiente proposición prueba que el riesgo mínimo óptimo es creciente con el valor esperado de retorno del portafolio.

PROPOSICIÓN 2. *El funcional $\sigma^2(\cdot)$ es creciente, es decir si: $E_1 \leq E_2$, entonces $\sigma^2(E_1) \leq \sigma^2(E_2)$.*

PRUEBA. Esta proviene directamente de la consideración del tipo de restricción asociado al retorno del valor esperado. ■