

OPCIONES, COBERTURA Y PROCESOS DE DIFUSIÓN CON SALTOS: UNA APLICACIÓN A LOS TÍTULOS DE GCARSO

Francisco Venegas Martínez*
Oxford University

Resumen: Se presentan dos modelos de cobertura con opciones europeas, cuando el subyacente es conducido por un proceso de difusión con saltos. En el primero, el precio de la opción se calcula como la media de los precios de las opciones que cubren saltos secuenciales. En el segundo, el precio de la opción se determina mediante la minimización de la varianza del valor del portafolio. En particular se desarrollan coberturas para el caso de las acciones de GCARSO, y se investiga sobre su estabilidad ante cambios en los parámetros.

Abstract: We present two models for hedging European options on an underlying asset driven by a mixed diffusion-jump process. The first model, values the option as the average of option prices hedging sequential jumps. In the second model, the option price is determined by minimizing the variance of the portfolio value. In particular, we develop hedging strategies for the case of GCARSO shares.

Clasificación JEL: G10

Fecha de recepción: 5 IX 2000

Fecha de aceptación: 27 VI 2001

* Mathematical Finance Group, 24-29 St. Giles, Oxford OX1 3LB, England, UK, venegas@maths.ox.ac.uk.

Agradezco las valiosas observaciones de dos dictaminadores anónimos, que mejoraron sustancialmente el trabajo. Asimismo, agradezco las sugerencias de Bernardo González-Aréchiga, Jaime Díaz y José Carlos Ramírez. Las opiniones o errores son mi responsabilidad.

1. Introducción

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de opciones financieras, se debe en gran medida a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente del mercado debido a la liquidez que generan (*i.e.*, siempre es posible encontrar compradores y vendedores) y al apalancamiento que presentan (*i.e.*, la inversión inicial es pequeña comparada con la de otros instrumentos). Las opciones, y en particular las que se refieren a títulos de capital, son herramientas útiles que permiten a los inversionistas administrar el riesgo de mercado con costos bajos. Además, cuando las transacciones se llevan a cabo en bolsas de opciones, el riesgo contraparte es mínimo debido a la asociación del mercado con una cámara de compensación y liquidación que garantiza el cumplimiento de las obligaciones adquiridas por las posiciones cortas (*i.e.*, los emisores de opciones de compra o venta).

En la valuación de productos derivados, el supuesto de que la variable subyacente sigue una distribución lognormal, o que su tasa de crecimiento sigue una distribución normal, es muy común. En particular, es usual suponer que las variables financieras siguen un movimiento Browniano geométrico. Sin embargo, existe evidencia empírica de que la mayoría de las variables financieras, incluyendo el precio de diversos activos, no se comportan de acuerdo con una distribución lognormal. De hecho, dichas variables casi nunca se comportan de acuerdo con distribuciones teóricas comúnmente conocidas. Por ejemplo, las distribuciones empíricas de los rendimientos diarios de varios de los títulos que cotizan en el mercado mexicano de capitales presentan, en general, sesgo y exceso de curtosis, y no siempre es posible ajustar una distribución teórica simple. En el trabajo de Ramírez Sánchez (2001) se ajustan mezclas de distribuciones normales a los rendimientos diarios de varias de las principales acciones que cotizan en bolsa, y se destaca que el rendimiento diario de estos títulos difícilmente puede ser descrito con sólo una variable aleatoria normal.

En este trabajo, a diferencia de Ramírez Sánchez (2001), estamos particularmente interesados en estudiar subyacentes que pueden ser descritos con una mezcla de una variable lognormal con un proceso de Poisson. Una de las principales características que distingue a los mercados financieros es que ocasionalmente se presentan movimientos inesperados (auges o caídas). Estos movimientos ocurren con mayor frecuencia de lo que se esperaría bajo el supuesto de una distribución lognormal, incluso con una volatilidad razonablemente moderada.

En el análisis de datos financieros, cuando se compara una distribución estandarizada empírica con una distribución normal estándar, se observa con frecuencia que la cresta de la distribución empírica es más alta. Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar, es decir, los mismos puntos de inflexión, entonces las colas de la distribución empírica tienen necesariamente que ser más anchas para compensar el área de la cresta, que en ambos casos tiene que ser igual a uno. La cresta más alta significa que existe una probabilidad más grande de movimientos pequeños que la de una variable aleatoria con distribución normal. Por otro lado, debido a las colas más gordas (o pesadas) de la distribución empírica, se tiene una mayor probabilidad de que ocurran valores extremos en comparación con la distribución normal. En este caso, si la distribución normal se mezcla con una distribución que genere movimientos extremos en el rendimiento del título, se producirán colas más pesadas y se tendría una mejor aproximación a lo observado. A este respecto, en el presente trabajo, se lleva a cabo un análisis estadístico detallado del comportamiento de los precios y rendimientos diarios de los títulos de capital de GCARSO.

En los últimos años, el análisis financiero ha experimentado una serie de cambios y transformaciones que han modificado la forma de diseñar portafolios. Estos cambios han fomentado el uso de procesos estocásticos como herramienta básica para modelar el comportamiento de los variables financieras y sus derivados. Vale la pena mencionar, al respecto, los artículos seminales de Merton (1971), Black y Scholes (1973) y Cox y Ross (1976). Contribuciones más recientes en la valuación de opciones sobre acciones, índices bursátiles y divisas se pueden encontrar en Bjork (1999); Bjerksund y Stensland (1993); Reiner y Rubinstein (1991); y Turnbull y Wakeman (1991). En cuanto al modelado de tasas de interés y sus derivados, se destacan los trabajos de Hull y White (1993) y (1990); Heath, Jarrow y Morton (1992); Black, Derman y Toy (1990); Nelson y Siegel (1987); Ho y Lee (1986); Cox, Ingersoll y Ross (1985); y Rendleman y Bartter (1980).

Las estrategias de cobertura desarrolladas con el análisis básico de Black y Scholes (1973) son útiles sólo cuando el riesgo de mercado está asociado a un proceso de difusión, entre otros supuestos típicos del modelo. Sin embargo, si se agrega una componente de saltos, las coberturas presentan problemas de unicidad con la distribución para valorar (de hecho, existe un número infinito de distribuciones), lo que conduce a una situación de mercados financieros incompletos.¹ En

¹ Sobre mercados financieros incompletos, véanse, por ejemplo, el trabajo

este caso, se establecen supuestos, en general restrictivos, para elegir una distribución a fin de estimar coberturas. Otra posibilidad para resolver esta limitación del esquema básico de Black-Scholes consiste en diseñar coberturas que minimicen la varianza del valor del portafolio. Sin embargo, las complicaciones técnicas surgen en la práctica con los supuestos estándar para la determinación de una martingala equivalente mínima, así como con la estimación de estrategias de cobertura mediante soluciones numéricas de una ecuación diferencial parcial o una ecuación diferencial-integral.

En este trabajo, se presentan dos modelos de cobertura con opciones europeas cuando el precio del activo subyacente es conducido por un proceso de difusión con saltos. En el primer modelo, el precio de la opción se calcula como la media de los precios de opciones que cubren saltos secuenciales. En el segundo modelo, el precio de la opción se determina mediante la minimización de la varianza del valor del portafolio. A manera de ilustración, se estiman estrategias de cobertura para el caso de las acciones de GCARSO y se investiga sobre la estabilidad de las estrategias ante cambios en los parámetros relevantes. Las estrategias de cobertura se estiman numéricamente mediante subrutinas y procedimientos simples en *Mathematica* o *MATLAB*.² Otra posibilidad para modelar saltos en la dinámica del subyacente y valor numéricamente sus derivados, se encuentra en el trabajo de Naik (1993) en donde, en lugar de considerar saltos desde los precios, lo que salta es el parámetro de volatilidad. Las principales características de nuestras estimaciones son: 1) el rebalanceo en la composición del portafolio se lleva a cabo con modificaciones simples en el sistema de ecuaciones resultante; 2) las estrategias se actualizan en forma inmediata cuando hay más información disponible sobre expectativas y condiciones del mercado; y 3) el proceso de valuación numérica permite analizar coberturas de volatilidad extrema en presencia de colas pesadas.

Existe una tendencia creciente en la literatura en cuanto al empleo de procesos de difusión con saltos. En finanzas internacionales se encuentran los trabajos de Venegas Martínez (200a) y (2001), Venegas Martínez y González-Aréchiga (2000b), Svensson (1992), y Penati

seminar de Arrow (1963) y, más recientemente, Lamberton y Lapeyre (1996) y Bingham y Kiesel (1998).

² Véanse, por ejemplo, Shaw (1998) sobre valuación de derivados utilizando *Mathematica*; Hanselman and Littlefield (1998) sobre soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales en *MATLAB*; Kloeden y Eckhard (1992) sobre soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales estocásticas; y Wilmott, Dewynne y Howison (1993) sobre métodos numéricos para la valuación de opciones.

y Pennacchi (1989). En economía financiera, se tienen los trabajos de Ahn y Thompson (1988), Jarrow y Rosenfeld (1984), Malliaris y Brock (1982). Asimismo, en la valuación de productos derivados se destacan: Tapiero (1998); Wilmott (1998); Lamberton y Lapeyre (1996); Bouleau y Lamberton (1989); Fölmer y Sonderman (1990); y Merton (1976).

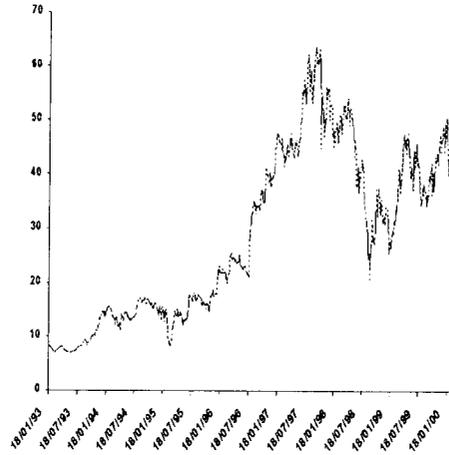
Este trabajo se encuentra organizado como sigue. En la sección dos, se examina la evidencia de colas pesadas en el rendimiento diario de la acción de GCARSO. En la 3, se introduce el proceso de difusión con saltos para modelar colas pesadas. En el transcurso de la cuarta, se presenta el planteamiento general del problema de cobertura con saltos de Poisson. En la sección 5, se estiman estrategias de valor medio con respecto al proceso de Poisson. En este caso, se hacen varios supuestos sobre la distribución de valuación a fin de estimar numéricamente estrategias de cobertura. En la 6, se estiman estrategias de cobertura de varianza mínima. Por último, en la sección 7, se presentan las conclusiones, se establecen las limitaciones y ventajas del método propuesto y se mencionan algunas líneas de investigación futura. Un apéndice contiene detalles técnicos sobre el lema de Itô aplicado a procesos de difusión con saltos.

2. Evidencia de saltos (colas pesadas)

En esta sección se analiza la dinámica de los rendimientos diarios de los títulos de capital de GCARSO. En particular, estamos interesados en ver que tan lejos se encuentra su distribución empírica de una distribución normal y que tan cerca de una mezcla de una variable normal con un proceso de Poisson. En la gráfica 1, se observa el comportamiento del precio ajustado de la acción GCARSO en el período comprendido entre el 4 de enero de 1993 y el 23 de marzo del 2000. En la gráfica 2, se compara la distribución empírica normalizada del rendimiento diario de la acción con la distribución normal estándar. Se observa que la cresta de la distribución empírica es notablemente superior a la de la distribución normal. Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar y la cresta de la primera es mayor, la distribución empírica tendrá, necesariamente, colas más pesadas.

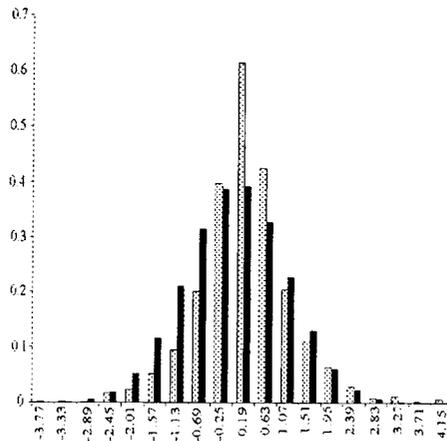
Gráfica 1

*Comportamiento del precio del título GCARSO
(4 de enero de 1993 - 23 de marzo del 2000)*



Gráfica 2

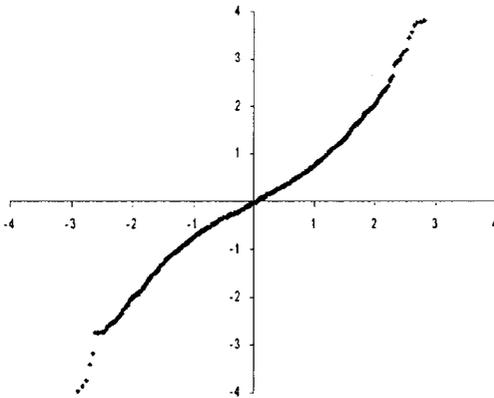
*Distribución empírica normalizada del rendimiento diario
del título GCARSO A1 y la distribución normal estándar*



La diferencia entre las distribuciones, observada en la gráfica 2, es típica en muchas variables financieras. La distribución empírica tiene una cresta más alta que la de una variable aleatoria con distribución normal, lo más importante es observar que las colas de la distribución empírica son más pesadas y debido a ellas se tiene una mayor probabilidad de que valores extremos ocurran en comparación con la distribución normal. En este caso, si la distribución normal se mezcla con una distribución que genere movimientos extremos o saltos en el valor del rendimiento del título, se producirían colas más pesadas y se tendría una aproximación más realista del comportamiento del rendimiento del activo.

Gráfica 3

Gráfica Q-Q del rendimiento diario del título GCARSO.

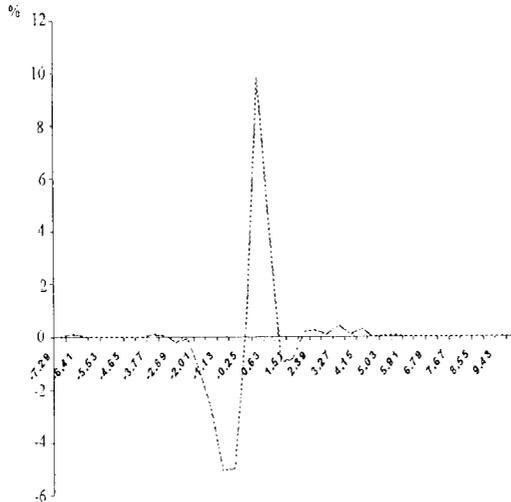


La gráfica 3 es llamada gráfica Cuantil-Cuantil o gráfica Q-Q. Esta gráfica nos proporciona otra forma de visualizar la diferencia entre una distribución empírica y una distribución normal, particularmente cuando se está interesado en la detección de colas pesadas. Esta gráfica se elabora como sigue: se ordenan los rendimientos observados en forma creciente, denotados como $R_{(t)}$ con un índice t que va de 1 hasta T . Luego se obtienen los valores (argumentos) Q_t de la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar que proporcionan el valor $(t - 0.5)/T$. Por último, se

grafica cada punto $(Q_t, R_{(t)})$. Cuando la curva que une los puntos es una línea recta, el supuesto de normalidad de las observaciones $R_{(t)}$ podría ser el correcto. Sin embargo, en el caso examinado la curva está lejos de ser una recta debido a la presencia de colas pesadas.

Gráfica 4

Diferencia entre la distribución acumulada de los rendimientos diarios de GCARSO A1 y la distribución normal estándar.



Finalmente, la gráfica 4 muestra la diferencia entre la distribución acumulada de los rendimientos de la acción de GCARSO A1 y la distribución acumulada de una variable normal estándar, en donde se observa una mayor variabilidad alrededor del origen.

3. Procesos de difusión con saltos

En los últimos años, la ingeniería financiera ha experimentado cambios profundos en la forma de diseñar portafolios. Estos cambios han abierto nuevos paradigmas que resaltan la importancia de la exposición a distintos riesgos financieros. Estos paradigmas, en general, han abierto nuevos horizontes a la teoría y, consecuentemente,

al empleo de herramientas más sofisticadas que permitan una mayor comprensión de los fenómenos financieros que presentan saltos de naturaleza estocástica.

A continuación, se define un proceso de difusión con saltos en donde el movimiento Browniano geométrico modela cambios pequeños en el precio del subyacente, los cuales siempre están presentes, y el proceso de Poisson modela cambios extremos e inesperados en el precio del subyacente, los cuales ocasionalmente ocurren. Este tipo de procesos es de gran utilidad en el modelado de colas pesadas.³ Considere un proceso estocástico dq_t que satisfice:

$$dq_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt + o(dt), \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt + o(dt). \end{cases}$$

en donde $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$. Más precisamente,

$$\begin{aligned} \Pr\{\text{un salto de tamaño 1 durante } dt\} &= \Pr\{dq_t = 1\} \\ &= \lambda dt + o(dt), \end{aligned}$$

mientras que

$$\Pr\{\text{ningún salto durante } dt\} = \Pr\{dq_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt).$$

Por lo tanto, existe una probabilidad finita de que ocurra un salto en un tiempo finito. Note que $E[dq_t] = \lambda dt$. Observe también que se tiene una probabilidad λdt de un salto en q_t de tamaño 1 en el instante dt . El parámetro λ es conocido como la intensidad del proceso de Poisson y define el número medio esperado de saltos por unidad de tiempo.

El proceso de Poisson puede ser incorporado en un modelo de difusión de un subyacente P_t de la siguiente forma:

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dz_t + \nu P_t dq_t, \tag{1}$$

en donde el parámetro que define la tendencia, μ , representa la media esperada del rendimiento condicional en que ningún salto ocurra; σ es

³ Otra alternativa para describir colas pesadas es a través del uso de modelos de volatilidad estocástica. Véanse, por ejemplo: Avellaneda, Levy y Parás (1995); Ball y Roma (1994); Fouque, Papanicolaou y Sircar (2000); Heston (1993); Hull y White (1987); Renault y Touzi (1996); Stein y Stein (1991) y Wiggins (1996).

la desviación estándar o volatilidad del rendimiento condicional en que ningún salto ocurra; y z_t es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, z_t tiene incrementos temporales independientes y dz_t satisface $E[dz_t] = 0$ y $\text{Var}[dz_t] = dt$. Se supone que los procesos dz_t y dq_t no están correlacionados entre sí. Si hay un salto, es decir, si $dq_t = 1$, entonces P_t inmediatamente toma el valor $P_t(1 + \nu)$, con lo que se puede modelar un incremento brusco en el rendimiento de una acción. En lo que sigue se supone que ν , el tamaño del salto, es una variable aleatoria independiente de dz_t y dq_t .

Finalmente, nótese que el proceso estocástico $\log(P_t)$, asociado con (1), está dado por:

$$d\log(P_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dz_t + \log(1 + \nu)dq_t, \quad (2)$$

lo cual es sólo una versión del proceso de difusión con salto de Itô (véase apéndice A). Observe asimismo que en este caso,

$$P_t = P_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \int_0^t dz_u + \log(1 + \nu) \int_0^t dq_u \right\} > 0.$$

De lo anterior se desprende que el rendimiento, $d\log(P_t)$, puede tomar valores positivos y negativos, y el nivel en el precio, P_t , se mantiene siempre positivo.

4. El problema de cobertura con saltos de Poisson

En esta sección se presenta el problema de cobertura con opciones europeas sobre acciones en la presencia de saltos. El planteamiento es consistente con la hipótesis de mercados eficientes (Fama, 1970 y Samuelson, 1965), es decir, la dinámica del precio de la acción puede ser descrita con una martingala. En este contexto, el proceso subyacente genera, por una parte, información en tiempo continuo que afecta sólo el precio marginal y, por otro lado, de vez en cuando genera información específica de la emisora en tiempos discretos afectando más que marginalmente el precio del título.

Considerese un portafolio con α_1 opciones de precio $c(P_t, t)$ y una cantidad α_2 de títulos de precio P_t . En este caso, el valor del portafolio, al tiempo t , satisface

$$\Pi_t = \alpha_1 c(P_t, t) + \alpha_2 P_t. \quad (3)$$

El cambio en el valor del portafolio debido sólo a fluctuaciones del mercado es $d\Pi_t = \alpha_1 dc(P_t, t) + \alpha_2 dP_t$.

Una aplicación simple del lema de Itô para procesos de difusión con salto (véase el apéndice A) conduce a

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu P_t \frac{\partial c}{\partial P_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial P_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial P_t} \sigma P_t dz_t \right] \\ & + \alpha_1 [c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t)] dq_t \\ & + \alpha_2 (\mu P_t dt + \sigma P_t dz_t + \nu P_t dq_t). \end{aligned} \quad (4)$$

De manera equivalente, el cambio en el valor del portafolio en el instante dt , está dado por

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \alpha_1 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial P_t^2} \right) dt \\ & + \left(\alpha_1 \frac{\partial c}{\partial P_t} + \alpha_2 \right) \mu P_t dt + \left(\alpha_1 \frac{\partial c}{\partial P_t} + \alpha_2 \right) \sigma P_t dz_t \\ & + [\alpha_1 (c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t)) + \alpha_2 \nu P_t] dq_t. \end{aligned} \quad (5)$$

Si no existe un salto en el instante dt , es decir, si $dq_t = 0$, entonces se puede seleccionar, por ejemplo, la cobertura delta definida por $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -\partial c / \partial P_t$ para eliminar el riesgo inducido por dz_t . Sin embargo, si existe un salto, en cuyo caso $dq_t = 1$, entonces el portafolio cambia de valor y la cobertura deja de ser efectiva debido al riesgo asociado con dq_t . En la siguiente sección se discuten algunas alternativas para administrar dicho riesgo. Observe por último que una opción que cubra contra saltos en el subyacente tiene que ser más cara que una opción en un escenario en donde no se presentan saltos.

5. Cobertura de valor medio

En esta sección se estiman estrategias de cobertura bajo un conjunto de supuestos en la distribución asociada al tamaño del salto. Observe primero que si se seleccionan $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -\partial c / \partial P_t$ y se sustituyen en la ecuación (5), es decir, si se cubre una venta en corto del subyacente con una posición larga sobre una opción de compra, se obtiene una estrategia parecida a las generadas por Black-Scholes (1973) para

cubrir los movimientos de difusión. Por lo tanto, el cambio en el valor del portafolio está dado por:

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial P_t^2} \right) dt + \left[c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t) - \nu P_t \frac{\partial c}{\partial P_t} \right] dq_t. \quad (6)$$

En este caso, el cambio en el valor del portafolio no se comporta completamente en forma determinista en el instante dt , ya que existe la posibilidad de que se presenten saltos con una media esperada por unidad de tiempo igual a λ . Si se toma la esperanza de esta expresión y se establece que el cambio en el valor del portafolio es igual al rendimiento libre de riesgo del valor inicial del portafolio con una tasa de interés constante, r , para todos los plazos, es decir, si $d\Pi_t = r\Pi_t dt = r(\alpha_1 c(P_t, t) + \alpha_2 P_t) dt$, entonces

$$0 = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial P_t^2} + r P_t \frac{\partial c}{\partial P_t} - r c + \lambda E[c(P_t(1 + \nu), t)] - \lambda c(P_t, t) - \lambda \frac{\partial c}{\partial P_t} P_t E[\nu], \quad (7)$$

con las condiciones de frontera $c(0, t) = 0$ y $c(P_t, 0) = \max(P_t - X, 0)$ donde X es el precio de ejercicio de la opción. En este caso, claramente la ecuación anterior no puede ser llevada a través de transformaciones a la ecuación de calor, como en el caso de Black-Scholes. Debido a la presencia de $E[\nu]$, esta ecuación es del tipo diferencial-integral, la cual presenta complicaciones técnicas para su solución y, en general, requiere de métodos numéricos (en particular, métodos de transformada de Fourier) para calcular soluciones aproximadas y examinar el comportamiento de $c(P_t, t)$. No obstante, un punto importante que hay que destacar en la ecuación (7) es que su naturaleza es no-local, es decir, dicha ecuación relaciona los valores de la opción con valores distantes de P_t , a pesar de sólo tener derivadas locales. Por supuesto, el valor de la opción en este momento depende de los saltos en el instante dt .

Vale la pena destacar también que si ν es determinista y suficientemente pequeña, entonces la cobertura delta, es decir, la cobertura con $\alpha_2 = -\partial c / \partial P_t$, proporciona, en términos generales, una protección adecuada aun cuando se presentan saltos ya que

$$\frac{c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t)}{\nu P_t} \approx \frac{\partial c}{\partial P_t}.$$

En este caso, el coeficiente de dq_t en (6) es casi nulo. Finalmente, note que cuando $\lambda = 0$, la ecuación (7) se reduce simplemente, como era de esperarse, a la ecuación diferencial parcial parabólica de Black-Scholes.

Otra alternativa para reducir el riesgo de mercado generado por los factores dz_t y dq_t , con base en la ecuación (5), sería resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial c}{\partial P_t} + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 (c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t)) + \alpha_2 \nu P_t = 0. \end{cases}$$

Se contemplan los siguientes casos:

1) Si $\alpha_1 = 0$, entonces $\alpha_2 = 0$, lo cual no resuelve el problema de cobertura.

2) Si $\alpha_1 \neq 0$, entonces

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \frac{\partial c}{\partial P_t}.$$

Después de sustituir la expresión anterior en (5) e igualar el resultado con el retorno libre de riesgo del portafolio se obtiene

$$\begin{aligned} & r\left(c - \frac{\partial c}{\partial P_t} P_t\right) dt \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial P_t^2} \right) dt \\ &+ \left[(c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t)) - \frac{\partial c}{\partial P_t} \nu P_t \right] dq_t. \end{aligned}$$

Esta última expresión conduce de nuevo a la ecuación (7). Una posibilidad para determinar $c(P_t, t)$ consiste en definir una sucesión de variables aleatorias Y_n que tienen la misma distribución que el producto de n variables independientes e idénticamente distribuidas a ν , donde $Y_0 = \text{constante}$. En este caso particular, la solución de la ecuación (7) con las condiciones de frontera

$$c(0, t) = 0, \quad y \quad c(P_t, 0) = \text{máx}(P_t - X, 0),$$

está dada por

$$c(P_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!} E [c_{BS}(P_t Y_n \exp(-\lambda E[\nu]t), t; \sigma^2, r)],$$

donde $c_{BS}(\cdot)$ es la solución básica de Black-Scholes. La ecuación anterior proporciona un valor medio, $c(P_t, t)$, de las primas esperadas, $E[c_{BS}(\cdot)]$, con respecto a una distribución de Poisson con media λt . Dicha ecuación permite, para n suficientemente grande, calcular soluciones aproximadas en forma sencilla ya que las funciones de densidad asociadas a la sucesión $\{Y_n\}$ son simples de calcular. En el caso particular de que ν tenga distribución lognormal con media $E[\nu]$ y desviación estándar σ' , se sigue que Y_n se distribuye también lognormal con desviación estándar $n\sigma'$ y $E[Y_n] = \exp[n \log(1 + E[\nu])]$, entonces la valuación de la opción europea es

$$c(P_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda' t)(\lambda' t)^n}{n!} c_{BS} [P_t, t; \sigma_n^2, r_n], \quad (8)$$

donde $\sigma_n^2 = \sigma^2 + n(\sigma')^2/t$ y $r_n = r - \lambda E[\nu] + (n \log(1 + E[\nu])/t)$ y $\lambda' = \lambda(1 + E[\nu])$. En este caso, el precio de la opción, $c(P_t, t)$, se calcula como el valor medio, con respecto a la distribución de Poisson, de los precios de las opciones que cubren secuencialmente los saltos, $c_{BS} [P_t, t; \sigma_n^2, r_n]$.

Con el propósito de obtener aproximaciones numéricas de (8) para el título GCARSO, se utilizan los precios y las estimaciones de los parámetros del siguiente cuadro.

Cuadro 1

Valores de los parámetros y precio de la opción

Precios y parámetros relevantes					
S	X	r	σ	T	c_{BS}
42.00	41.00	0.11	0.13	0.25	2.436

En el cuadro 2 se presentan valores aproximados de la valuación de la opción bajo difusión y saltos para distintos valores de λ manteniendo fijo $E[\nu]$. Para el cálculo de soluciones numéricas de (7) se ha utilizado (8), con $n = 10,000$, bajo el supuesto de que ν sigue una

distribución lognormal con media 0.01 y varianza 0.001. La gráfica 5 muestra el comportamiento del precio de la opción ante cambios en el número promedio esperado de saltos por unidad de tiempo *Ceteris paribus*. Como puede esperarse, ante la presencia de saltos en el subyacente, la opción se vuelve más cara. Es importante notar también que, en este caso, cambios pequeños en λ producen cambios pequeños en el precio de la opción, *i.e.*, los precios son estables ante cambios en los parámetros relevantes.

Cuadro 2
Precios de la opción en función de λ

Valuación bajo difusión y saltos					
$E[\nu]=0.01, \text{Var}[\nu]=0.001$					
λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
c	2.506	2.575	2.641	2.706	2.747
	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	2.830	2.890	2.896	3.006	3.061

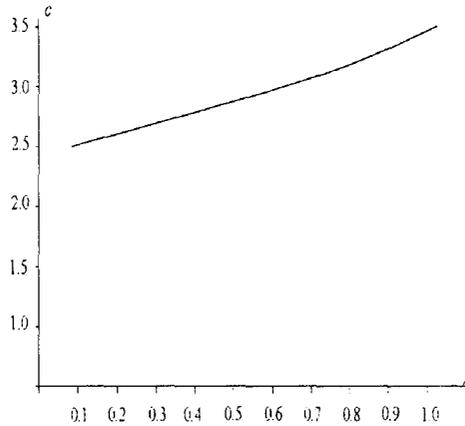
Bajo el supuesto anterior de que ν sigue una distribución lognormal con varianza 0.001, el cuadro 3 muestra el comportamiento del precio de la opción de compra en función de $E[\nu]$. En la gráfica 6 se observa el comportamiento del precio de la opción ante cambios en tamaño medio esperado del salto *Ceteris paribus*. Nótese también que, en este caso, cambios pequeños en $E[\nu]$ conducen a cambios pequeños en el precio de la opción.

Cuadro 3
Precios de la opción en función de $E[\nu]$

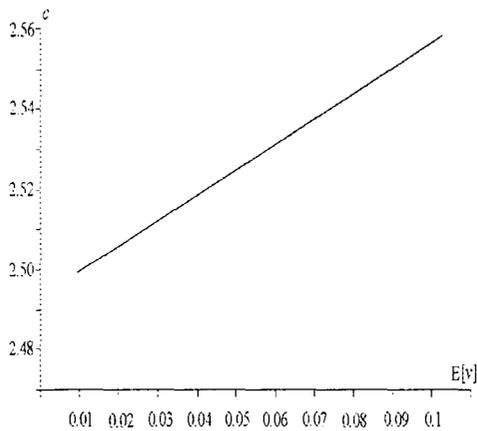
Valuación bajo difusión y saltos					
$\text{Var}[\nu]=0.001 \lambda=0.1$					
$E[\nu]$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
c	2.506	2.514	2.523	2.532	2.542
	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
	2.551	2.561	2.571	2.581	2.591

Gráfica 5

Soluciones aproximadas con saltos en función de λ
(caso GCARSO).

**Gráfica 6**

Soluciones aproximadas con saltos en función de $E[\nu]$
(caso GCARSO)



Los supuestos sobre el comportamiento de la sucesión $\{Y_n\}$ pueden ser muy restrictivos para determinar soluciones de (7), la siguiente sección presenta una alternativa de cobertura en donde la prima de la opción se determina a través de la minimización de la varianza del cambio en el valor del portafolio.

6. Cobertura de varianza mínima

En la sección anterior se estudiaron estrategias de cobertura de naturaleza no-local. Otra posibilidad para cubrir la difusión y los saltos, a partir de la ecuación (5), tanto como sea posible, es fijar $\alpha_1 = 1$ y, posteriormente, obtener α_2 de tal manera que se minimice la varianza del cambio en el valor en el portafolio.

En virtud de (5), el cambio en el valor del portafolio tomando en cuenta sólo los factores de riesgo, con α_2 arbitraria, es

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial c}{\partial P_t} + \alpha_2 \right) \sigma P_t dz_t + [c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t) + \alpha_2 \nu P_t] dq_t + \dots$$

La varianza de este cambio, la cual es una medida del riesgo en el portafolio, está dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}[d\Pi_t] &= \left(\frac{\partial c}{\partial P_t} + \alpha_2 \right)^2 \sigma^2 P_t^2 dt \\ &+ \lambda E \left[(c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t) + \alpha_2 \nu P_t)^2 \right] dt + \dots \end{aligned} \tag{9}$$

Nótese ahora que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_2} &= 2 \left(\frac{\partial c}{\partial P_t} + \alpha_2 \right) \sigma^2 P_t^2 dt \\ &+ 2 P_t \lambda E [\nu (c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t) + \alpha_2 \nu P_t)] dt \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_2^2} = 2 \sigma^2 P_t^2 dt + 2 P_t^2 \lambda E[\nu^2] dt > 0,$$

lo que asegura la existencia de un mínimo, ya que se cumplen las condiciones suficientes. Por lo tanto, el valor de α_2 que minimiza (9), el cual se obtiene de $\partial \text{Var}[d\Pi_t]/\partial \alpha_2 = 0$, satisface

$$\alpha_2 = -\frac{\lambda E[\nu(c(P_t(1+\nu), t) - c(P_t, t))] + \sigma^2 P_t \frac{\partial c}{\partial P_t}}{\lambda P_t E[\nu^2] + \sigma^2 P_t}. \quad (10)$$

Si se valua la opción en términos de la esperanza sobre la mejor estrategia de cobertura. Es decir, si se sustituye α_2 en (5) y el resultado se iguala con el retorno libre de riesgo del portafolio inicial con una tasa de interés constante a todos los plazos, se llega a que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial P_t^2} + P_t \frac{\partial c}{\partial P_t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{\lambda E[\nu^2] + \sigma} (\mu + \lambda E[\nu] - r) \right) \\ & - rc + \lambda E \left[(c(P_t(1+\nu), t) - c(P_t, t)) \times \right. \\ & \left. \left(1 - \frac{\nu}{\lambda E[\nu^2] + \sigma} (\mu + \lambda E[\nu] - r) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

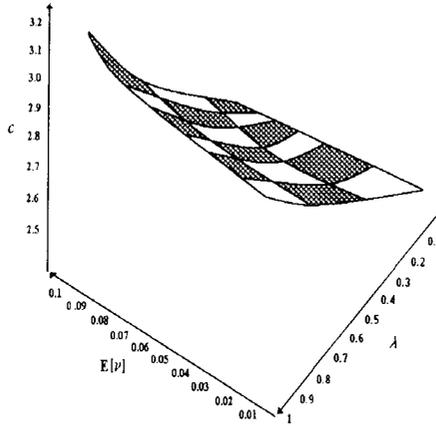
Cuando $\lambda = 0$, se obtiene, de nuevo, la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. En la gráfica 7 se presenta la superficie generada por soluciones numéricas de la ecuación (11) para el caso de la acción de GCARSO con los parámetros del cuadro 1 y el supuesto de que ν tiene una distribución lognormal con varianza 0.001. En este caso, si $\lambda=0.1$ (con $E[\nu]=0.01$), la estrategia de cobertura está completamente determinada con un valor estimado de $\alpha_2=0.795$, mientras que para $\lambda=0.2$, el valor estimado de α_2 es 0.799.

Es importante destacar que la actualización de nueva información en μ , σ , ν , λ y r para generar la correspondiente superficie de estrategias requiere de sustituciones simples en el proceso de valuación numérica de (10) y (11).

Como puede observarse, los resultados obtenidos en el transcurso de las dos últimas secciones presentan diferencias sustanciales con respecto al análisis estándar de Black-Scholes. Sin embargo, en ambos casos, la cobertura es efectiva sólo en un intervalo pequeño de tiempo, unos días, posiblemente una semana. Por lo tanto, se requiere de actualizaciones periódicas en la composición del portafolio que tomen en cuenta las condiciones y expectativas del mercado.

Es importante mencionar, al respecto, que el proceso de valuación numérica de (10) y (11) no requiere de cambios sustanciales cuando hay más información disponible.

Gráfica 7
Soluciones aproximadas de la ecuación (11)
 (caso GCARSO).



En este punto surge una pregunta natural: ¿por qué no se determinan α_1 y α_2 que minimicen $\text{Var}[d\Pi_t]$, en lugar de fijar $\alpha_1 = 1$ y determinar sólo α_2 ? La respuesta es simple, en este caso, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\alpha_1 \frac{\left(\frac{\partial c}{\partial P_t}\right)^2 \sigma^2 P_t^2 + \lambda E[(c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t))^2]}{\frac{\partial c}{\partial P_t} \sigma^2 P_t^2 + \lambda P_t E[\nu(c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t))]} + \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_1 \frac{\frac{\partial c}{\partial P_t} \sigma^2 P_t^2 + P_t \lambda E[\nu(c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t))]}{\sigma^2 P_t^2 + P_t^2 \lambda E[\nu^2]} + \alpha_2 = 0,$$

y la única solución es $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, lo que no resuelve el problema de cobertura de una venta en corto del subyacente.

Nótese, por último, que en el caso extremo cuando no existe difusión, es decir, si $\sigma = 0$, entonces $P_t = \mu P_t dt + \nu P_t dq_t$, y (9) se transforma en

$$\text{Var}[d\Pi_t] = \lambda E \left[(c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t) + \alpha_2 \nu P_t)^2 \right] dt. \quad (12)$$

En este caso, se tiene que

$$\frac{\partial \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_2} = 2P_t \lambda E [\nu (c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t) + \alpha_2 \nu P_t)] dt$$

y

$$\frac{\partial^2 \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_2^2} = 2P_t^2 \lambda E [\nu^2] dt > 0.$$

Por lo tanto, el valor de α_2 que minimiza (12) satisface

$$\alpha_2 = - \frac{E [\nu (c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t))]}{P_t E [\nu^2]}. \quad (13)$$

Si se sustituye α_2 en (5) y el resultado se iguala con el retorno libre de riesgo del portafolio, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \mu P_t \frac{\partial c}{\partial P_t} - rc + \lambda E \left[(c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t)) \times \right. \\ \left. \left(1 - \frac{\nu}{\lambda E [\nu^2]} (\mu + \lambda E [\nu] - r) \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación puede ser empleada para generar la superficie de coberturas con los mismos procedimientos que se utilizaron en (11).

7. Conclusiones

Para calcular el precio de una opción en presencia de colas pesadas, en general, se requiere de métodos numéricos. Por otro lado, debido

a las complicaciones técnicas de los métodos de valuación existentes, éstos difícilmente puedan ser llevados a la práctica. En este trabajo se han estimado estrategias de cobertura de valor medio o de varianza mínima con opciones europeas, sobre el título GCARSO, utilizando subrutinas y procedimientos simples en *Mathematica* y *MATLAB*. A diferencia de otras alternativas disponibles en la literatura, las estimaciones generadas requieren de procedimientos sencillos para el rebalanceo y el análisis de casos extremos.

Las estrategias de cobertura aquí estudiadas inmunizan temporalmente el riesgo de mercado. Por lo tanto, se requiere de actualizaciones periódicas o "rebalanceo" de la cobertura a fin de proteger eficazmente no sólo contra cambios difusos y extremos en el valor del subyacente, sino también contra cambios catastróficos. Si una estrategia no es rebalanceada atendiendo a las expectativas del mercado, la protección se deteriora progresivamente.

Por último, es importante resaltar las limitaciones de los supuestos de los modelos estudiados: 1) la tendencia, μ , la volatilidad, σ , y el parámetro de intensidad, λ , del proceso que guía al subyacente son constantes; 2) no se consideran costos de transacción (comisiones e impuestos); 3) los títulos de capital son divisibles en cualquier fracción; 4) no hay pago de dividendos en el periodo de cobertura; 5) la cotización y negociación del mercado de contado es continua; 6) la tasa de interés libre de riesgo es constante para todos los plazos. En este marco, y considerando sólo los supuestos que merecen más atención, el trabajo se puede extender en varias direcciones. Primero, es posible considerar, sin cambios sustanciales, que la tendencia, volatilidad e intensidad del proceso que guía al subyacente sean funciones del precio de contado del título y del tiempo. Segundo, se requiere más investigación en cuanto a la estructura de plazos de la tasa de interés, digamos, estructuras modeladas a través de procesos estocásticos que están disponibles en la literatura. Finalmente, es importante, incluir en el análisis el pago de dividendos y el caso de opciones americanas. Sin duda, los aspectos anteriores requieren de una mayor investigación en el futuro.

Bibliografía

- Ahn, C. M. y H. E. Thompson (1988). "Jump-Diffusion Processes and the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, 43, pp. 155-174.
- Arrow, K. J. (1963). "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing", *Review of Economic Studies*, 31, pp. 91-96.

- Avellaneda, M., A. Levy y A. Parás (1995). "Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities", *Applied Mathematical Finance*, 2, pp. 73-88.
- Ball, C. y A. Roma (1994). "Stochastic Volatility Option Prices", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(4), pp. 589-607.
- Bingham, N. H. y R. Kiesel (1998). *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer-Verlag.
- Bjerkstrand, P. y G. Stensland (1993). "Closed-Form Approximation of American Options", *Scandinavian Journal of Management*, 9, pp. 87-99.
- Bjork, T. (1999). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.
- Black, F. E. Derman y W. Toy (1990). "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, enero-febrero, pp. 33-39.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.
- Bouleau, N. y D. Lamberton (1989). "Residual Risk and Hedging Strategies in Markovian Markets", *Stochastic Processes and Their Applications*, 33, pp. 131-150.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, pp. 385-407.
- Cox, J. C. y S. Ross (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 145-166.
- Fama, E. F. (1970). "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", *Journal of Finance*, 25, pp. 383-417.
- Fölmer, H. y D. Sonderman (1990). "Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information, Applied Stochastic Analysis", en M. H. A. Davis y R. J. Elliot (eds.), Gordon y Breach.
- Fouque, J. P., G. Papanicolaou y K. R. Sircar (2000). *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press.
- Gihman, I. y A. V. Skorohod (1972). *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag.
- Hanselman, D. y Littlefield (1998). *Mastering MATLAB 5: A Comprehensive Tutorial and Reference*, Prentice Hall.
- Heath, D., R. Jarrow y A. Morton (1992). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology", *Econometrica*, 60, pp. 77-105.
- Heston, S. (1993). "A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, 6(2), pp. 327-343.
- Ho, T. S. y S. B. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rates Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-1029.
- Hull, J. y A. White (1993). "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, pp. 235-254.
- (1990). "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, pp. 573-592.
- (1987). "The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatility", *Journal of Finance*, 42(2), pp. 281-300.

- Jarrow, R. A. y E. R. Rosenfeld, (1984). "Jump Risks and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Journal of Business*, 57, pp. 337-351.
- Kloeden, P. E. y P. Eckhard (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag.
- Lamberton, D. y Lapeyre, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall.
- Malliariis, A. G. y W. A. Brock (1982). *Stochastic Methods in Economic and Finance*, North-Holland.
- Merton, R. C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 125-144.
- (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *Journal of Economic Theory*, 3, pp. 373-413.
- Nelson, C. R. y A. F. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curves", *Journal of Business*, 60, núm. 4, pp 473-489.
- Naik, V. (1993). "Options, Valuations, and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Assets Returns", *Journal of Finance*, vol. 48, pp. 1969-1984.
- Penati, A. y G. Pennacchi (1989). "Optimal Portfolio Choice and the Collapse of a Fixed-Exchange Rate Regime", *Journal of International Economics*, 27, pp. 1-24.
- Ramírez Sánchez, J. C. (2001). *Los problemas más comunes en el pronóstico de rendimientos de activos con distribuciones no normales*, Documento de Trabajo, CIDE.
- Reiner, E. y M. Rubinstein, (1991). "Breaking Down the Barriers", *Risk Magazine*, 4(8).
- Renault, E. y N. Touzi, (1996). "Option Hedging and Implied Volatility in a Stochastic Volatility Model", *Mathematical Finance*, 6(3), pp. 279-302.
- Rendleman, R y B. Bartter, (1980). "The Pricing of Options on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, pp 11-24.
- Samuelson, P. A. (1965). "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", *Industrial Management Review*, 6, pp. 41-49.
- Shaw, W. T. (1998). *Modelling Financial Derivatives with Mathematica*, Cambridge University Press.
- Stein, E. y J. Stein, (1991). "Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *Review of Financial Studies*, 4(4), pp. 727-752.
- Svensson, L. E. O. (1992). "The Foreign Exchange Risk Premium in a Target Zone with Devaluation Risk", *Journal of International Economics*, 33, pp. 21-40.
- Tapiero, C. S. (1998). *Applied Stochastic Models and Control for Finance and Insurance*, Kluwer Academic Publishers.
- Turnbull, S. M. y L. M. Wakeman (1991). "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26, pp. 377-389.
- Venegas Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, núm. 9, pp. 1429-1449.
- (2000a). "On Consumption, Investment, and Risk", *Economía Mexicana*, nueva época, 9, núm. 2, pp. 227-244.

——— y B. González-Aréchiga, (2000b). “Mercados incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: El caso mexicano”, *Momento Económico*, 111, pp. 20-27.

Wiggins, J. (1996). “Option Values under Stochastic Volatility”, *Journal of Financial Economics*, 9(2), pp. 351-372.

Wilmott, P. (1998). *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley and Sons.

———, J. N. Dewynne y S. D. Howison (1993). *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press,

Apéndice A

Un par de resultados útiles en el desarrollo de este trabajo se establecen en el siguiente apéndice (véase Gihman y Skorohod, 1972):

1) Lema de Itô para procesos de difusión con saltos: Dada la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea

$$dP_t = P_t(\mu dt + \sigma dz_t + \nu dq_t) \tag{A.1}$$

y $c(P_t, t)$ una función dos veces diferenciable, con segundas derivadas parciales continuas, entonces la diferencial estocástica de $c(P_t, t)$ está dada por

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial P_t} \mu P_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial P_t^2} \sigma^2 P_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial P_t} \sigma P_t dz_t + [c(P_t(1 + \nu), t) - c(P_t, t)] dq_t. \tag{A.2}$$

2) La solución de (A.1) está dada por

$$P_t = P_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \int_0^t dz_u + \log(1 + \nu) \int_0^t dq_u \right\}. \tag{A.3}$$

También vale la pena tener en mente que, cuando se usa (A.3), las siguientes propiedades para z_t y q_t se cumplen para $t \geq 0$:

$$E \int_0^t dz_u = 0, \quad E \left(\int_0^t dz_u \right)^2 = E \int_0^t du = t, \quad \text{y} \quad E \int_0^t dq_u = \lambda t.$$