

# COBERTURA DE FLUJOS FINANCIEROS CON INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA

**Francisco Venegas Martínez\***

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey*

*Resumen:* Se desarrolla un modelo estocástico para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos financieros contra el riesgo de tasa de interés con instrumentos de renta fija, en particular, con bonos cupón cero. En nuestra propuesta, la dinámica de la tasa de interés es conducida por un proceso estocástico de difusión con reversión de la media. El modelo destaca los conceptos de duración y convexidad monetaria en la administración del riesgo de tasa de interés. A manera de ilustración, se generan estrategias de inmunización con bonos cupón cero cuando la estructura de plazos de la tasa de interés es conducida por el modelo de Vasicek (1977).

*Abstract:* In this paper, we develop a stochastic model to hedge the present value of cash flows against interest-rate risk with fixed-income products, in particular, with zero coupon bonds. In our approach, the dynamics of the interest rate is driven by a mean-reverting stochastic diffusion process. The model stresses the concepts of money duration and money convexity in interest-rate risk management. An application is addressed, by way of illustration, to generate hedging strategies with zero coupon bonds when the term structure of the interest rate is driven by the Vasicek's (1977) model.

*Clasificación JEL: G11, G13*

*Fecha de recepción: 11 III 2002*

*Fecha de aceptación: 03 V 2002*

---

\* Agradezco las sugerencias de Bernardo González-Aréchiga, Jaime Díaz y Alejandro Islas; así como los valiosos comentarios de un dictaminador anónimo. El autor asume la responsabilidad de cualquier error u omisión. fvenegas@campus.ccm.itesm.mx

## 1. Introducción

El creciente uso de instrumentos de renta fija para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos financieros (activos y/o pasivos), se debe en gran medida a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para abrir y cerrar posiciones. Los títulos de deuda, pública o privada, son herramientas útiles que permiten a los inversionistas institucionales, a los fondos de pensiones y a las tesorerías de corporativos administrar el riesgo de tasa de interés con bajos costos de transacción. En conclusión, los instrumentos de renta fija permiten a los inversionistas cubrir sus posiciones pasivas y/o activas, en respuesta a sus expectativas económicas y financieras, reduciendo el riesgo y la incertidumbre del mercado con bajos costos de transacción.

En el episodio de diciembre de 1994, o mejor dicho en la debacle financiera de 1995, llama la atención el que muchas tesorerías de corporativos no hayan tomado las medidas necesarias, en vista de la enorme exposición al riesgo de tasa de interés, para planear oportunamente sus pasivos en el corto plazo y/o reestructurar los mismos en el largo plazo, ya que, cuando los instrumentos de renta fija se usan adecuadamente protegen a los agentes económicos contra fluctuaciones adversas, no anticipadas, en la tasa de interés.<sup>1</sup>

El riesgo por fluctuaciones adversas en la tasa de interés que enfrentan las tesorerías de corporativos se refleja en la posibilidad de que el valor presente de los flujos, activos y pasivos, que se tienen planeados no se presente en la magnitud que se esperaba, lo que afecta la programación de las decisiones de gasto, inversión y financiamiento. El riesgo de tasas de interés puede reducirse, si se cubre adecuadamente el valor presente de los flujos esperados tomando posiciones sobre títulos de deuda privada o gubernamental.

En los últimos años, el análisis financiero en México ha experimentado una serie de cambios y transformaciones profundas que han modificado la forma de diseñar portafolios. Vale la pena destacar los trabajos de: Black, Derman y Toy (1990), Avellaneda y Parás (1996), González-Aréchiga, Díaz y Venegas (2000), (2001); Venegas y González-Aréchiga (2002); Islas y Venegas (2002), Venegas (2001b); Díaz (1997), (1997a); y González-Aréchiga (1997). En este trabajo, se desarrolla un modelo estocástico para inmunizar el valor presente

---

<sup>1</sup> Un análisis más detallado sobre los efectos de un mercado financiero incompleto en la economía mexicana se puede encontrar en: Venegas (2001), (2000), (2000a), (1999), Venegas y González-Aréchiga (2000), y Díaz y Venegas (2001).

de flujos financieros mediante el uso de bonos cupón cero. En nuestro modelo, las tasas de interés y los precios de los bonos son modelados a través de ecuaciones diferenciales estocásticas. Asimismo, el uso del cálculo estocástico permite, en forma natural, utilizar los conceptos de duración y convexidad monetaria en la medición y el control del riesgo por movimientos adversos en la tasa de interés. En particular, en esta investigación se generan estrategias de inmunización cuando la estructura de plazos de la tasa de interés es conducida por una ecuación diferencial estocástica del tipo de Vasicek (1977). Otras alternativas que se encuentran disponibles en la literatura para generar coberturas contra el riesgo de tasa de interés se encuentran en Ho y Lee (1986), Fabozzi (1996), Ahn, Khadem y Wilmott (1998), González-Aréchiga, Venegas y Díaz (2000) y (2001). Las principales diferencias de esta investigación con respecto a la literatura existente son las siguientes:

- 1) la aplicación del método propuesto se fundamenta en un marco teórico consistente;
- 2) el método considera explícitamente la sensibilidad del portafolio a variaciones en la fecha en que inicia la cobertura;
- 3) la aplicación del método es simple, ya que sólo requiere de sistemas de ecuaciones lineales;
- 4) el rebalanceo del portafolio se lleva a cabo con modificaciones simples en el sistema de ecuaciones resultante;
- 5) las estrategias de inmunización se actualizan en forma inmediata cuando hay más información disponible sobre expectativas y condiciones del mercado; y
- 6) el proceso de estimación numérica permite analizar coberturas de volatilidad extrema.

El desarrollo de la investigación es como sigue. En la sección 2 se define la dinámica de tasas de interés con base en el proceso de Wiener, en la 3, se introduce el concepto de estrategia de cobertura con bonos cupón cero. En la siguiente, se discuten los conceptos de duración y convexidad monetarias, los cuales desempeñan un papel esencial en la cobertura del valor presente de un conjunto de flujos financieros. En la sección 5 se expone el modelo de Vasicek. Más adelante, con base en una estructura de plazos del tipo de Vasicek, nuestra propuesta se aplica en la generación de coberturas de un conjunto de flujos financieros. En la sección 7 se presentan las conclusiones, se establecen las limitaciones y las ventajas del modelo, y se mencionan algunas líneas de investigación futura. Finalmente, se presenta un apéndice con los detalles de los resultados analíticos.

## 2. Estructura intertemporal de la tasa de interés

El supuesto de que las tasas de interés se mantienen constantes, o bien que su dinámica está determinada por una función conocida en el tiempo, podría ser razonable para instrumentos de renta fija de muy corto plazo, digamos días o posiblemente semanas en períodos de estabilidad. Sin embargo, en el mediano y largo plazo, la tasa de interés presenta un comportamiento aleatorio, en cuyo caso el movimiento Browniano proporciona una herramienta adecuada de análisis. Específicamente, se supone que la tasa *spot* o tasa instantánea de interés,  $r_t$ , es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t, \quad (1)$$

en donde  $\mu(r_t, t)$  y  $\sigma(r_t, t)$  son funciones conocidas. El proceso estocástico  $W_t$  es un proceso de Wiener estandarizado (también llamado movimiento Browniano), es decir,  $W_t$  es una variable aleatoria normal con incrementos temporales independientes, la cual satisface  $E[dW_t] = 0$  y  $\text{Var}[dW_t] = dt$ . Las formas funcionales  $\mu(r_t, t)$  y  $\sigma(r_t, t)$  determinan la evolución de la tasa *spot* y de la estructura de plazos. Más adelante se especificarán formas funcionales para  $\mu(r_t, t)$  y  $\sigma(r_t, t)$  de fácil interpretación.

## 3. La ecuación de compensación del portafolio combinado

En esta sección se presenta la ecuación de compensación entre flujos y bonos. A continuación, vamos a denotar al proceso que conduce al precio de un bono cupón cero mediante  $B(r_t, t; T)$ , donde  $r_t$  es la tasa *spot*,  $t$  es la fecha de emisión del instrumento y  $T$  es la fecha de vencimiento. En específico, la valuación teórica de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento está dada por:

$$B(r_t, t; T) = E \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2)$$

donde  $\mathcal{F}_t$  es la información disponible en  $t$  y  $r_t$  es la tasa corta. Es decir, el descuento se calcula como el promedio de los valores de la tasa corta (*spot*) en el intervalo  $[t, T]$ .

Para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo, se utilizarán tres bonos cupón cero con vencimientos  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ ,  $T_1 < T_2 < T_3$ . La razón por la que se eligen tres bonos con

distintos vencimientos se justificará más adelante. Así pues, el precio del bono con vencimiento  $T_i$  tiene precio  $B_i(r_t, t; T_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Considere una estrategia de cobertura con  $x_i$  unidades de cada bono con vencimiento en  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Sea  $V(r_t, t; f)$  el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo,  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , cada uno de los cuales se presenta en una fecha preestablecida  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Se desea determinar cantidades  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , de tal manera que los cambios en el valor presente de  $f$ ,  $V(r_t, t; f)$  por variaciones en la tasa de interés, se compensen con los flujos generados por bonos de distintos vencimientos, es decir,

$$0 = x_1 dB_1 + x_2 dB_2 + x_3 dB_3 + dV. \quad (3)$$

En este caso,

$$V(r_t, t; f) = E \left\{ \sum_{j=1}^n f_j \exp\{-R(t, \tau_j; r_t)(\tau_j - t)\} \middle| \mathcal{F}_t \right\}, \quad (4)$$

donde

$$R(t, x; r_t) = \frac{1}{x-t} \int_t^x r_s ds.$$

Si  $dV < 0$ , por lo menos un  $dB_i$  es positivo y, recíprocamente, si  $dV > 0$ , por lo menos un  $dB_i$  es negativo. La aplicación del Lema de Itô a  $B_i(r_t, t; T_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , conduce a:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 dB_1 + x_2 dB_2 + x_3 dB_3 + dV \\ &= x_1 \left[ \left( \frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma(r_t, t) \frac{\partial B_1}{\partial r_t} dW_t \right] \\ &+ x_2 \left[ \left( \frac{\partial B_2}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial B_2}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma(r_t, t) \frac{\partial B_2}{\partial r_t} dW_t \right] \\ &+ x_3 \left[ \left( \frac{\partial B_3}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial B_3}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 B_3}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma(r_t, t) \frac{\partial B_3}{\partial r_t} dW_t \right] \\ &+ \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial V}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma(r_t, t) \frac{\partial V}{\partial r_t} dW_t. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> Una discusión básica sobre el Lema de Itô puede verse, por ejemplo, en Venegas (2001b).

Después de reagrupar términos en  $dt$  y  $dr_t$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 0 = & \left( x_1 \frac{\partial B_1}{\partial t} + x_2 \frac{\partial B_2}{\partial t} + x_3 \frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \\
 & + \left( x_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + x_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} + x_3 \frac{\partial B_3}{\partial r_t} + \frac{\partial V}{\partial r_t} \right) dr_t \\
 & + \frac{1}{2} \sigma(r_t, t)^2 \left( x_1 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} + x_2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} + x_3 \frac{\partial^2 B_3}{\partial r_t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} \right) dt.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Esta ecuación es fundamental para generar estrategias de cobertura con bonos, como se verá en las siguientes secciones, pues contiene información sobre el tiempo promedio en que se presentan los flujos de efectivo o se realizan pagos de los bonos, así como información de la dispersión de dichos tiempos con respecto al tiempo promedio de pagos.

#### 4. Inmunización por duración y convexidad

A continuación se desarrolla un método de cobertura del valor presente de un conjunto de flujos de efectivo. Dado que  $dt$  y  $dW_t$  son variables independientes en (5), entonces las siguientes tres condiciones:

$$\begin{cases}
 x_1 \frac{\partial F_1}{\partial t} + x_2 \frac{\partial F_2}{\partial t} + x_3 \frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \\
 x_1 \frac{\partial F_1}{\partial r_t} + x_2 \frac{\partial F_2}{\partial r_t} + x_3 \frac{\partial F_3}{\partial r_t} + \frac{\partial V}{\partial r_t} = 0, \\
 x_1 \frac{\partial^2 F_1}{\partial r_t^2} + x_2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial r_t^2} + x_3 \frac{\partial^2 F_3}{\partial r_t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} = 0.
 \end{cases} \tag{6}$$

implican la relación establecida en (5) entre los precios de los bonos y el valor presente de los flujos de efectivo. El sistema anterior tiene tres ecuaciones en las incógnitas  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . En todo lo que sigue, se supone que el determinante asociado al sistema (6) es distinto de cero a fin de garantizar soluciones no triviales. Los valores  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  definen una estrategia de cobertura. Las cantidades  $\partial B_i / \partial r_t$  y  $\partial^2 B_i / \partial r_t^2$ ,  $i=1,2,3$ , se conocen como duración y convexidad monetarias del bono  $B_i$ , respectivamente. De igual manera, la sensibilidad del valor presente a cambios en la tasa de interés,  $\partial V / \partial r_t$  recibe el

nombre de duración monetaria de  $V$  y la cantidad  $\partial^2 V / \partial r_t^2$  es llamada convexidad monetaria de  $V$ . Las cantidades  $\partial B_i / \partial t$ ,  $i=1,2,3$ , y  $\partial^2 V / \partial t$  miden, respectivamente, la sensibilidad de los bonos y del valor presente a cambios en la fecha de inicio de la cobertura. Note que la duración se determina a través de una aproximación lineal, o de primer orden, entre un valor presente y la tasa de interés. La duración mide también el tiempo promedio (ponderando por el valor presente de los flujos) en que se presentan los flujos. Por otro lado, la experiencia demuestra que cuando los cambios no son pequeños desplazamientos, la relación que se presenta entre el valor presente de los flujos y la tasa de interés no es lineal. Por lo tanto, es importante considerar una medida de sensibilidad de segundo orden conocida como convexidad. La cual es una medida de dispersión de los tiempos en que se presentan los flujos, entre mayor sea la convexidad más grande será la dispersión entre dichos tiempos. La agregación de la convexidad a la duración, es decir, la expansión del valor presente en series de Taylor hasta el segundo orden, suponiendo despreciables los otros términos, nos permite tener una medida más precisa del cambio en el valor presente de los flujos esperados ante cambios moderados en la tasa de interés. Como puede observarse, la inmunización por duración y convexidad es, fundamentalmente, un método local, aplicable en el instante  $dt$ , diseñado para cubrir cambios en el valor presente por desplazamientos paralelos, pequeños y moderados, en la tasa de interés. Por esta razón, las estrategias de inmunización requieren de actualizaciones periódicas o rebalanceo para proteger eficazmente, no sólo contra pequeños desplazamientos en las tasas, sino también contra cambios moderados y extremos.<sup>3</sup> Si una estrategia no es rebalanceada atendiendo al comportamiento y a las expectativas del mercado, la protección se deteriorará progresivamente.

## 5. El modelo de Vasicek

Existen en la literatura varios modelos estocásticos de tasas de interés. En especial, en esta sección nos concentramos en el modelo de Vasicek (1977). Este modelo de equilibrio general es muy útil debido a sus propiedades para valuar bonos. Presenta reversión de la media a un valor constante, lo cual es una propiedad deseable que se observa con

---

<sup>3</sup> Otros modelos de cobertura contra volatilidad extrema que utilizan procesos de difusión con saltos, aplicados al mercado de capitales mexicano, se encuentran en Venegas-Martínez (2001a).

frecuencia en la dinámica de las tasas de interés. Específicamente, el modelo de Vasicek tiene la forma:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (7)$$

con  $a$ ,  $b$ , y  $\sigma > 0$  cantidades constantes y conocidas. En este caso, el precio del bono  $B(r_t, t; T)$  está dado por (los detalles de los resultados analíticos pueden ser consultados en el apéndice):

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}$$

donde

$$A(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$D(t, T) = \frac{(A(t, T) - T + t)(a^2 b - \frac{\sigma^2}{2})}{a^2} - \frac{\sigma^2 A(t, T)^2}{4a}.$$

Asimismo, la estructura de plazos  $R(t, T; r_t)$  satisface:

$$R(t, T; r_t) = -\frac{1}{T-t} \ln [B(r_t, t; T)]. \quad (8)$$

Para fines prácticos, la ecuación anterior puede plantearse en términos discretos como una ecuación estocástica en diferencias. Si escribimos  $\beta_0 = ab$  y  $\beta_1 = 1 - a$ , entonces

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

donde  $\{\varepsilon_t\}$  son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza  $\sigma^2$ . La media (incondicional) de  $r_t$  es  $\beta_0/(1 - \beta_1) = b$  y su varianza (incondicional) es  $\sigma^2/(1 - \beta_1)^2 = \sigma^2/[1 - (1 - a)^2]$ . La varianza condicional de  $r_t$  es, por supuesto  $\sigma^2$ . La gráfica 1 muestra el comportamiento de la tasa (corta) *spot* (rendimiento anualizado de CETES a un día<sup>4</sup>), entre el 3 enero y el 29 de diciembre del 2000. Los datos faltantes fueron estimados con la metodología del Filtro de Kalman.<sup>5</sup> Los resultados de la estimación

<sup>4</sup> En este caso, se utilizaron los vectores de precios que se publican en el *Boletín* de la Bolsa Mexicana de Valores, en su sección de análisis y evaluación de instrumentos de deuda (varios números, 2000).

<sup>5</sup> Véase, por ejemplo, la metodología del Filtro de Kalman en Venegas, de Alba y Ordorica (1999).

de los parámetros del modelo autorregresivo (9), con errores estándar entre paréntesis, son como sigue:

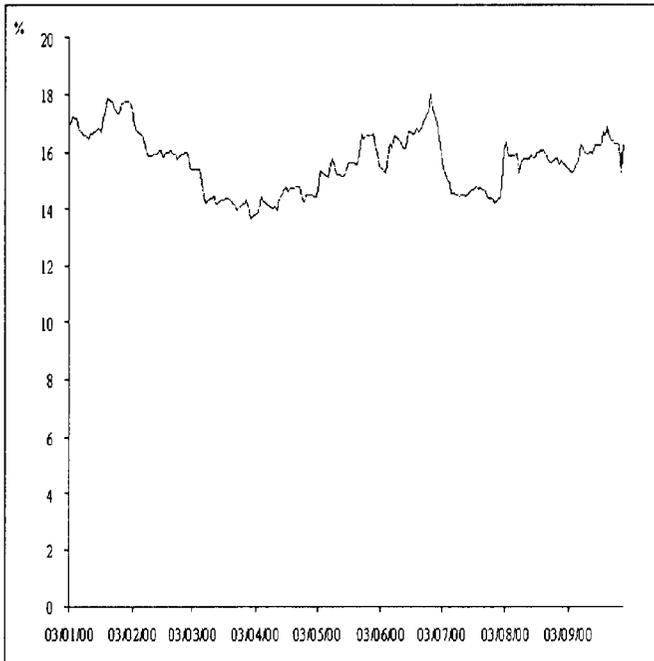
$$r_t = 0.0289 + 0.8305r_{t-1} \tag{10}$$

(0.0075) (0.02819)

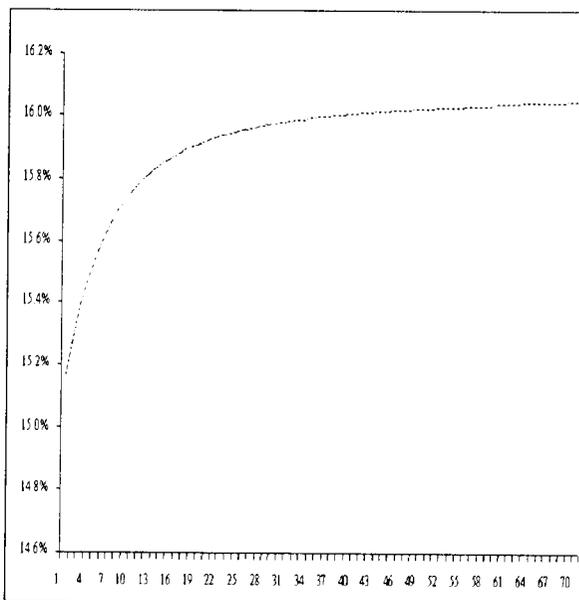
En este caso, se puede apreciar que las estimaciones son significativamente distintas de cero con un 95% de confianza. La gráfica 2 muestra la estructura de plazos definida a través de la ecuación (8) con  $t = 0$ ,  $a=0.1695$ ,  $b=0.1709$ ,  $r_0=0.15$  y  $\sigma = 0.0239$ . Como puede observarse, la estructura de plazos es creciente y, en el largo plazo, se estabiliza en un valor cercano al 16%.

### Gráfica 1

*Comportamiento de la tasa spot anualizada  
(3 enero - 29 de diciembre del 2000)*



**Gráfica 2**  
*Estructura de plazos estimada*  
*(eje horizontal en días)*



## 6. Ejemplo de aplicación

A continuación se aplica el método propuesto en la inmunización de un conjunto de flujos de efectivo contra el riesgo de tasa de interés. A partir de la estructura de plazos de la tasa de CETES, estimada con el modelo de Vasicek, se determinan la duración y convexidad monetarias del valor presente de un conjunto de flujos de efectivo y de un conjunto de bonos para diferentes vencimientos. Posteriormente, con el sistema de ecuaciones lineales definido en (6), se calculan las cantidades de bonos de distintos vencimientos que inmunizan dichos flujos contra el riesgo de tasa de interés. En la tabla 1, se presenta un conjunto de flujos esperados que se desea cubrir. En la tabla 2 se listan las estrategias de cobertura con las estructura de plazos generada con el modelo de Vasicek. Si el número de bonos,  $x_i$  es positivo, se genera una posición larga (posición de compra); en caso contrario ( $x_i < 0$ ) se genera una posición corta (posición de venta).

**Cuadro 1**

*Flujos de efectivo (pasivos y activos)  
sujetos de cobertura*

<i>Flujo</i>	<i>Monto</i>	<i>Fecha</i>
$f_1$	\$1,000,000.00	30-Ene-00
$f_2$	-\$950,000.00	04-Jun-00
$f_3$	\$1,000,000.00	29-Feb-00
$f_4$	-\$950,000.00	04-Dic-00

**Cuadro 2**

*Cobertura con estructura de plazos del tipo Vasicek*

<i>Vencimiento del bono</i> (valor nominal \$100,000.00)					
<i>2000</i>					
<i>Estrategia</i>	<i>19 Ene</i>	<i>16 Feb</i>	<i>15 Mar</i>	<i>14 Jun</i>	<i>20 Dic</i>
1	$x_1 = -4.21$	$x_2 = 1.22$	$x_3 = 9.75$	—	—
2	$x_1 = 5.38$	—	$x_2 = 7.91$	$x_3 = 5.55$	—
3	$x_1 = 10.32$	—	—	$x_2 = 3.71$	$x_3 = 1.57$
4	$x_1 = 8.01$	$x_2 = 6.45$	—	—	$x_3 = 2.32$
5	—	$x_1 = 12.13$	$x_2 = 2.54$	—	$x_3 = 1.11$
6	—	$x_1 = 8.21$	$x_2 = 9.56$	$x_3 = 1.27$	—
7	—	$x_1 = 15.53$	—	$x_2 = 0.84$	$x_3 = 0.21$

Como puede observarse, en los cuadros 1 y 2, las fechas de los flujos de efectivo no coinciden con las fechas de vencimiento de las series de los bonos; en caso contrario, el ejercicio sería trivial. Después de igualar entre bonos y flujos de efectivo, la sensibilidad al tiempo inicial de cobertura, la duración monetaria y la convexidad monetaria, se obtienen nuestras estrategias de inmunización. Por ejemplo, en la estrategia 1, se toma una posición corta (se emite deuda) de 4.21 bonos con vencimiento el 19 de enero, al mismo tiempo se toman posiciones largas de 1.22 bonos con vencimiento el 16 de febrero y de 9.75 con vencimiento el 15 de marzo; el valor nominal de cada bono es de \$100,000.00.

## 7. Conclusiones

En los últimos años, la ingeniería financiera ha experimentado profundas transformaciones sustentadas en las tecnologías de información y en el desarrollo de modelos en tiempo real, facilitando así la diversificación de portafolios y coberturas. En este trabajo, se ha desarrollado un modelo estocástico para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo con bonos cupón cero. A manera de ilustración, el método propuesto se aplicó a la generación de coberturas alternativas de un conjunto de flujos.

Es importante señalar algunas limitaciones del modelo. Si se desea disponer de cuatro o más bonos con distintos vencimientos, se obtendría con nuestro método un sistema de tres ecuaciones con cuatro o más incógnitas. Por lo tanto existiría un número infinito de estrategias de cobertura, de las cuales se pueden escoger algunas que cumplan con los atributos deseables.

Vale la pena destacar que aunque el modelo de Vasicek es de equilibrio general y presenta reversión de la media a un valor constante, además de proporcionar fórmulas explícitas en la valuación de bonos, la estructura de plazos depende explícitamente, en forma lineal, de la tasa corta. Otra limitación que el modelo de Vasicek tiene es que puede generar tasas de interés negativas para algunos valores de los parámetros (que no es nuestro caso). Por lo tanto, es importante extender el método de inmunización propuesto a otros modelos de tasas de interés que tratan con dichas limitaciones. Asimismo, se requiere más investigación para extender nuestro método a otros instrumentos de cobertura, por ejemplo, futuros y opciones.

## Bibliografía

- Ahn H., V. Khadem y P. Wilmott (1998). *On the Utility of Risky Bonds*, Mathematical Finance Group Working Paper, Oxford University.
- Avellaneda, M. y A. Parás (1996). "Managing the Volatility Risk of Derivative Securities", *Applied Mathematical Finance*, 3, pp. 21-53.
- Black, F., E. Derman y W. Toy (1990). "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, 46, pp. 33-39.
- Bolsa Mexicana de Valores (2000). *Boletín*, análisis y evaluación de instrumentos de deuda (varios números).

- Díaz Tinoco, J. (1997). "Riesgos en instrumentos de deuda y futuros sobre tasa de interés", en H. Sabau y G. Roa (comps.), *Derivados financieros: teoría y práctica*, Operadora de Bolsa, México, pp. 194-200.
- (1997a). "Cambios en el precio de un futuro sobre CETES a 91 días", en H. Sabau y G. Roa (comps.), *Derivados financieros: teoría y práctica*, Operadora de Bolsa, México, pp. 188-193.
- y F. Venegas (2001). "Política agrícola y contratos de futuros: un modelo de arbitraje", *Momento Económico*, 115, pp. 2-21.
- Fabozzi, F. J. (1996). *Bond Markets, Analysis and Strategies*, Prentice-Hall.
- González-Aréchiga, B. (1997). "El Mercado de productos derivados en México", en H. Sabau y G. Roa (comps.), *Derivados financieros: teoría y práctica*, Operadora de Bolsa, México, pp. 308-321.
- , F. Venegas y J. Díaz (2000). "Riesgo de tasas de interés e inmunización por duración y convexidad con futuros: análisis local y de valor en riesgo", *Investigación Económica*, 60 (233), pp. 77-112.
- González-Aréchiga, B., J. Díaz y F. Venegas (2001). "Riesgo cambiario, brecha de madurez, y cobertura con futuros: análisis local y de valor en riesgo", *Economía Mexicana*, 10 (2), pp. 259-290.
- (2000). "Política fiscal y contratos de futuros: El caso de las personas físicas en México (Simulación Monte Carlo y valuación binomial)", *Estudios Económicos*, (29), pp. 3-36.
- Ho, T. y S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 42, pp. 1129-1142.
- Islas C. A, y F. Venegas (2002). "Pricing Derivatives Securities with Prior Information on Long-memory Volatility", *Economía Mexicana*, (por aparecer).
- Vasicek, O. A., (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.
- Venegas Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25 (9), pp. 1429-1449.
- (2001a). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: Una aplicación a los títulos de GCARSO", *Estudios Económicos*, 16 (32), pp. 3-29.
- (2001b). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones", *Gaceta de Economía*, 6 (2), pp. 155-212.
- (2000). "On Consumption, Investment, and Risk", *Economía Mexicana*, 9(2), pp. 227-244.
- (2000a). "Aprendizaje, utilidad y estabilización", *Gaceta de Economía*, 5(10), pp. 153-169.
- (1999). "Crecimiento endógeno, dinero, impuestos y deuda externa", *Investigación Económica*, 59 (229), pp. 15-36.
- y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura de tasas de interés con futuros del Mercado Mexicano de Derivados: Un modelo estocástico de duración y convexidad", *El Trimestre Económico*, 59(274), pp. 27-54.
- (2000). "Mercados incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: El caso mexicano", *Momento Económico*, 111, pp. 20-27.
- Venegas Martínez, F., E. de Alba y M. Ordorica (1999). "On Information, Priors, Econometrics, and Economic Modeling", *Estudios Económicos*, (27), pp. 123-145.

## Apéndice

### Modelo de Vasicek

Cuando la tasa de interés *spot* presenta un comportamiento aleatorio, el movimiento Browniano es una herramienta adecuada de análisis. Existen en la literatura varios modelos de tasas interés ligados al movimiento Browniano. En particular, este apéndice se concentra en el modelo de Vasicek (1977):

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (A1)$$

*Precio de un bono (ecuaciones diferenciales parciales)*

En lo que sigue se denotará, como antes, al precio de un bono cupón cero mediante  $B(r_t, t; T)$ , donde  $T$  es la fecha de vencimiento. Una posibilidad de inmunizar un portafolio consiste en cubrir un bono con otro bono de vencimiento diferente. Considere entonces un portafolio con dos bonos con vencimientos diferentes  $T_1$  y  $T_2$ . De acuerdo con la notación previamente introducida, el bono con vencimiento  $T_1$  tiene precio  $B_1(r_t, t; T_1)$  y el bono con vencimiento  $T_2$  tiene precio  $B_2(r_t, t; T_2)$ . El portafolio a cubrir consiste de  $w_1$  unidades del instrumento  $B_1(r_t, t; T_1)$  y  $w_2$  unidades de  $B_2(r_t, t; T_2)$ . Si denotamos el valor del portafolio en la fecha  $t$  por  $\Pi_t$ , se tiene que:

$$\Pi_t = w_1 B_1 + w_2 B_2. \quad (A2)$$

El cambio en el portafolio en el instante  $dt$ , debido a fluctuaciones en los precios de los activos y no en el rebalanceo del portafolio (cambios en  $w_1$  o  $w_2$ ), está dado por:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & w_1 \left( \frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) dt + w_2 \left( \frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \right) dt \\ & + \left( w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) a(b - r_t) dt + \left( w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) \sigma dW_t. \end{aligned}$$

La expresión anterior se sigue inmediatamente de una simple aplicación del Lema de Itô. Si se eligen  $w_1 = 1$  y  $w_2 = -(\partial B_1 / \partial r_t) / (\partial B_2 / \partial r_t)$ , el coeficiente de  $dW_t$  es cero y, como consecuencia, se elimina la parte aleatoria. En este caso, se tiene que

$$d\Pi_t = \left[ \frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} - \left( \frac{\partial B_1}{\partial r_t} / \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) \left( \frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \right) \right] dt. \quad (A3)$$

Si se supone además que existe una alternativa de inversión libre de riesgo que paga la tasa corta  $r_t$  con la que los agentes pueden prestar y pedir prestado a dicha tasa, entonces al invertir la cantidad  $\Pi_t$  en esta alternativa se tiene que, durante  $dt$ ,

$$d\Pi = r_t \Pi dt = r_t \left[ B_1 - \left( \frac{\partial B_1}{\partial r_t} / \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) B_2 \right] dt. \quad (A4)$$

Si se utilizan argumentos típicos de arbitraje, se sigue que (A3) y (A4) son iguales. Después de agrupar los términos tanto en  $B_1$  como en  $B_2$  se obtiene que

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} - r_t B_1 \right) / \frac{\partial B_1}{\partial r_t} \\ &= \left( \frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} - r_t B_2 \right) / \frac{\partial B_2}{\partial r_t}. \end{aligned} \quad (A5)$$

Note ahora que el lado izquierdo de la ecuación es función sólo de  $T_1$  y el lado derecho sólo de  $T_2$ . Dado que ambos lados son iguales, entonces son independientes de la fecha de vencimiento. Se puede suponer, por lo tanto, que ambos lados son iguales a alguna función  $m(r_t, t)$  que no depende del vencimiento. Así, quitando los subíndices, se sigue que

$$\left( \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B \right) / \frac{\partial B}{\partial r_t} = m(r_t, t).$$

De forma equivalente,

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - m(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (A6)$$

Para encontrar la solución de (A6) se debe dar una condición final y dos de frontera. La primera corresponde al pago en el vencimiento

de un bono cupón cero  $B(r_T, T; T) = 1$ . Las condiciones de frontera dependen de la forma de  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$  y  $r_t$ . Se supone ahora una solución de la forma

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}. \quad (A7)$$

Note que  $A(T, T) = 0$  y  $D(T, T) = 0$ . Al diferenciar  $B$  se sigue que:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B, \quad \frac{\partial B}{\partial r_t} = -DB, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = D^2 B.$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (A6), se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 + m(r_t, t) D - r_t = 0. \quad (A8)$$

Note que  $A$  y  $D$  son funciones de  $t$  y  $T$ , mientras que  $m(r_t, t)$  es función de  $r_t$ . Si se deriva (A8) con respecto a  $r_t$  se obtiene

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + D \frac{\partial m}{\partial r_t} - 1 = 0. \quad (A9)$$

Note ahora que la ecuación (A6) y el Lema de Itô conducen al siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = m(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} + r_t B, \\ dB = \left[ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \frac{\partial B}{\partial r_t} a(b - r_t) \right] dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma dW_t, \end{cases}$$

lo que produce

$$dB - r_t B dt = \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma dW_t + [m(r_t, t) + a(b - r_t)] \frac{\partial B}{\partial r_t} dt. \quad (A10)$$

Si se elige como candidato de  $m(r_t, t)$  al más simple posible, entonces  $m(r_t, t) = ar_t - ab$ . Es decir, de la ecuación (A10), la diferencia entre el cambio en precio del bono y el rendimiento que paga el bono

está determinada únicamente por el movimiento Browniano. Por lo tanto, la sustitución de  $\partial m / \partial r_t = a$  en (A9) conduce a

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1.$$

La solución de la ecuación diferencial anterior con condición final  $D(T, T) = 0$  es

$$\begin{aligned} D(t, T) &= D(T, T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= -e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A}{\partial t} - r_t(aD - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + (ar_t - ab)D - r_t \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD. \end{aligned}$$

De manera equivalente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = abD - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2.$$

Así,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right)^2.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} A(t, T) &= b(t - T) - b \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) \quad (A11) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^2} \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_T^t e^{-2a(T-s)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b(t - T) - \frac{b}{a} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{a^3} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( e^{-2a(T-t)} - 1 \right) \\
&= b(t - T) - \frac{b}{a} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( e^{-2a(T-t)} - 1 \right). \\
&= \frac{1}{a^2} (t - T) \left( a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{a^2} D \left( a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( e^{-2a(T-t)} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{a^2} (D(t, T) - T + t) \left( a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a}.
\end{aligned}$$

*Precio de un bono (valores esperados)*

En la sección anterior se presentó el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales para determinar el precio de un bono, a continuación se ilustra un desarrollo alternativo que hace uso de las propiedades de la distribución de  $dW_t$ . Considere de nuevo el modelo de Vasicek:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

Si se hace el siguiente cambio de variable,

$$m_t = ar_t - ab,$$

entonces el modelo de Vasicek puede reescribirse como

$$dm_t = -am_t dt + a\sigma dW_t.$$

Esta ecuación es conocida como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. La importancia de dicho proceso es que la solución de (A12) es similar a la de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, es decir,

$$\begin{aligned} m_t &= m_0 e^{-at} + a\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \\ &= m_0 e^{-at} + a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \end{aligned}$$

En equivalencia,

$$ar_t - ab = (ar_0 - ab) e^{-at} + a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

o

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \quad (A12)$$

Claramente,  $r_t$  se distribuye normal con media (incondicional)

$$E\{r_t\} = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

y varianza (incondicional)

$$\text{Var}\{r_t\} = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}).$$

Note además que si  $r_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2a)$  y  $\text{Cov}(r_t, W_t) = 0$ , entonces

$$E[r_t] = b(1 - e^{-at})$$

y

$$\text{Var}\{r_t\} = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-2at} + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Asimismo, si  $r_0 \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2/2a)$  y  $\text{Cov}(r_t, W_t) = 0$ , tenemos que

$$E[r_t] = b$$

y

$$\text{Var}\{r_t\} = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Recuerde que el precio de un bono cupón cero que se emite en  $t$  y que paga una unidad monetaria en el tiempo en  $T$  satisface

$$B(r_t, t; T) = E \left\{ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}$$

donde  $\mathcal{F}_t$  es la información relevante disponible en el tiempo  $t$  (una filtración de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  perteneciente al espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  donde está definido  $W_t$ ). En este caso,  $\Omega$  es un espacio muestral y  $P$  es una medida de probabilidad. Ahora bien, de estadística elemental se sabe que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  está dada por

$$M_X(t) = E[e^t X] = \exp \left\{ tE[X] + \frac{1}{2}t^2 \text{Var}[X] \right\}.$$

En particular para  $t = 1$  se tiene que si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$E[e^X] = \exp \left\{ E[X] + \frac{1}{2} \text{Var}[X] \right\}.$$

Por lo tanto, si  $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$  fuera normal, entonces

$$\begin{aligned} B(r_t, t; T) &= E \left\{ \exp(-I(t, T)) \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \exp \left\{ -E[I(t, T) | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} \text{Var}[I(t, T) | \mathcal{F}_t] \right\}. \end{aligned}$$

A continuación se verá que efectivamente  $I(t, T)$  es normal. Del modelo de Vasicek se sigue que

$$\int_t^T dr_s = ab(T-t) - a \int_t^T r_s ds + \sigma \int_t^T dW_s.$$

De forma equivalente

$$r_T - r_t = ab(T-t) - aI(t, T) + \sigma \int_t^T dW_s.$$

En consecuencia,

$$I(t, T) = -\frac{1}{a}(r_T - r_t) + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s. \quad (A13)$$

Por otro lado, del mismo modelo de Vasicek se tiene que si en (A12) se sustituye 0 por  $t$  y  $t$  por  $T$ , es decir, se cambia de solución inicial y valor final, entonces

$$r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s.$$

Por lo tanto,

$$r_T - r_t = r_t \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) + b \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \quad (\text{A14})$$

$$+ \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s = (b - r_t) \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

$$+ \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s$$

A partir de (A13) y (A14), se encuentra que

$$\begin{aligned} I(t, T) &= -\frac{1}{a} \left[ (b - r_t) \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \right] \\ &+ b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s = b(T-t) + (r_t - b) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right) \\ &+ \sigma \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a}\right) dW_s. \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

Es importante recordar ahora una de las reglas más importantes del cálculo estocástico

$$\text{Var} \left[ \int_0^t H(s) dW_s \right] = \text{E} \left[ \left( \int_0^t H(s) dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t [H(s)]^2 ds.$$

Por lo tanto,

$$E[I(t, T)|\mathcal{F}_t] = b(T-t) + (\tau_t - b) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(t, T)|\mathcal{F}_t] &= \sigma^2 \int_t^T \left( \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right)^2 ds \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left( T-t - 2 \int_t^T e^{-a(T-s)} ds + \int_t^T e^{-2a(T-s)} ds \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ T-t - \frac{2}{a} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right) + \frac{1}{2a} \left( 1 - e^{-2a(T-t)} \right) \right] \end{aligned}$$

Si se supone, como antes, que

$$B(\tau_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)},$$

tenemos que

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$\begin{aligned} A(t, T) &= -b(T-t) + bD(t, T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left[ T-t - \frac{2}{a} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right) + \frac{1}{2a} \left( 1 - e^{-2a(T-t)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{a^2} (t-T) \left( a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{a^2} D \left( a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( e^{-a^2(T-t)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a^2} (D(t, T) - T + t) \left( a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a}. \end{aligned}$$

Este resultado coincide plenamente con el establecido en (A11), con lo que se concluye el apéndice.