DISTRIBUCIÓN DE LOS RENDIMIENTOS DEL MERCADO MEXICANO ACCIONARIO*

Bárbara Trejo

José Antonio Nuñez

Arturo Lorenzo

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Resumen: Se muestra un estudio empírico para comparar la distribución normal, la *t-Student* y la distribución gaussiana inversa normal (NIG). Se lleva a cabo para el caso de los rendimientos de la bolsa Mexicana de Valores. Los parámetros de la distribución NIG y *t-Student* son estimados por máxima verosilimitud. El rechazo de normalidad es contundente al usar la prueba ómnibus. Los resultados son muy claros: el ajuste para la distribución NIG es mejor que para la distribución normal. También se realizó la prueba de Kolmogorov-Smirnov para comparar la *t-Student* y la NIG.

Abstract: We show an empirical study to compare the Normal, *t-Student* and the Normal Inverse Gaussian (NIG) distributions.This is made for the Mexican stock market returns. The parameters of the NIG and *t-Student* distributions are estimated by maximum likelihood. The rejection of normality is contundent using the omnibus test. The results are very clear: the adjustment of the NIG distribution is better than the adjustment for the Normal distribution. At the same time we used de Kolmogorov-Smirnov test to compare *t-Student* and NIG distributions.

Clasificación JEL: C13, C15, C16, G1

Palabras clave: distribución gaussiana inversa normal, rendimientos, comparación de distribuciones, normal inverse Gaussian distribution, returns, comparison of distributions.

Fecha de recepción: 14 IX 2004 *Fecha de aceptación: 10 VIII 2005*

* Los autores agradecen los valiosos comentarios de los dictaminadores anónimos. btrejo@itesm.mx, janm@itesm.mx, arvaldes@itesm.mx

1. Introducción

Durante los últimos años los rendimientos de las acciones se han modelado utilizando herramientas sofisticadas para explicar su comportamiento, una de ellas y, quizá la más importante, son los procesos estocásticos estacionarios continuos, dentro de los cuales el más conocido y, por lo mismo, el más utilizado es el movimiento browniano o proceso de Wiener. Desde 1900, con Louis Bachelier, esta clase de procesos se han usado en el campo de las finanzas en distintos modelos, por ejemplo, el de Black-Scholes (1973), que se utiliza para valuación de derivados y precios de opciones. Otra aplicación relevante es en el área de estructura de tasas de interés, donde encontramos distintos modelos, entre los que destacan el de Ho y Lee (1986), Cox, Ingersoll y Ross (1985) y Vasicek (1977).

En los años treinta se comenzó a estudiar una clase de procesos estocásticos estacionarios llamados procesos de Lévy. Estos tienen asociadas funciones de densidad infinitamente divisibles, entre las cuales se encuentran la *t-Student*, Poisson, Normal, Cauchy, binomial negativa, exponencial, hiperbólica, normal inversa gaussiana (NIG), hiperbólica generalizada, distribución Γ, distribución δ, etc.

En la Universidad de Aarhus, Barndorff-Nielsen (1977) propuso una nueva clase de funciones de densidad con colas semi-pesadas, como es la hiperbólica generalizada. Esta función de densidad la descubre Bagnold (1941) al modelar el tamaño de los granos de arena. La función tiene cinco parámetros, el primero (λ), nos dice qué tan pesadas son las colas de la función. De esta familia de funciones de densidad las más conocidas son las funciones hiperbólica (Eberlein y Keller, 1995 y Bibby y Sørensen 1995) y NIG, las cuales se originan cuando λ toma el valor de 1 o -1/2, respectivamente. Barndorff-Nielsen (1995) propuso la NIG para ajustar mejor las series de datos financieros. Trabajos posteriores realizados por Rydberg (1996), y Blæsild (1990) mostraron que, efectivamente, la NIG es apropiada para modelar datos financieros.

En este trabajo se demostrará que los datos en México no siguen una función de densidad normal. Ramírez (2004) hace énfasis en que el supuesto de normalidad no es adecuado y lo ilustra con el paquete *Banamex 30*. Esto último implica que el movimiento browniano no es adecuado para modelar el comportamiento financiero. También se muestra que la NIG proporciona un mejor ajuste para las series de rendimientos de las acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores y, por lo tanto, se justifica el uso de otro tipo de procesos estocásticos como son los procesos de Lévy con función de densidad NIG.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la sección dos se describen los datos para el estudio. En la tres se presentan las *pruebas omnibus de normalidad* y *Kolmogorov-Smirnov* para la *función de densidad t-Student* y se aplican a los datos. En la siguiente sección se revisan los conceptos importantes de *procesos de Lévy* y las propiedades de la *función de densidad normal inversa gaussiana*. Asimismo, se calculan los parámetros correspondientes de los distintos activos tratados en este trabajo para, posteriormente, presentar un apartado de resultados. En la sección seis se muestran algunas posibles aplicaciones de dicho tipo de procesos y, por último, exponemos las conclusiones.

2. Manejo de los datos

Para este trabajo se tomaron los precios de cierre de 35 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, así como las series del IPC y SP&500. Para cada una de las series se calcularon los rendimientos en logaritmos como

$$r_i = \ln P_i - \ln P_{i-1}$$

donde cada P_i representa el precio de cierre diario de la acción para la observación i y $\ln P_i$ es el logaritmo natural del precio en el día i.

En el cuadro 1 se muestran las series utilizadas en este estudio, así como el número de observaciones y el periodo que se tomó para cada una de ellas. El periodo no es uniforme, ya que en muchos casos las acciones no cotizaron en todas las fechas y por ello no existe información.

3. Pruebas de normalidad y de *t-Student*

Aquí revisamos brevemente la prueba de normalidad propuesta por Urzúa (1997) y la prueba de Kolmogorov-Smirnov aplicada a la función de densidad *t-Student*. Posteriormente se realizan las pruebas para cada una de las series antes mencionadas.

3.1. *Prueba de normalidad*

Esta es una prueba ómnibus que involucra todos los posibles terceros y cuartos momentos (puros y mixtos). En el caso univariado la prueba puede expresarse en términos del tercer y cuarto momentos estandarizados de las observaciones originales.

Si definimos

$$\sqrt{b_1} = m_3/m_2^{3/2} \text{ y } b_2 = m_4/m_2^2$$

con $m_i = \sum (x_j - \bar{x})^i/n$ el i-ésimo momento central, construimos el siguiente estadístico

$$LM_1 = n\left[\sqrt{b_1}^2/6 + (b_2-3)^2/24\right]^a \sim \chi_2^2$$

El estadístico fué propuesto en 1975 por Bowman y Shenton (1975) y Jarque y Bera (1980, 1987). Ellos asumen que bajo la hipótesis nula la media asintótica de $\sqrt{b_1}$ y b_2 son 0 y 3 respectivamente, sus varianzas asintóticas son $6/n$ y $24/n$, mientras que su covarianza asintótica es cero.

Al utilizar el resultado de Fisher (1930) es posible calcular exactamente cuales son las medias y las varianzas de $\sqrt{b_1}$ y b_2 bajo la hipótesis nula de normalidad.

$$E\left\{\sqrt{b_1}\right\} = 0$$
$$\mathrm{E}\left\{b_2\right\} = 3(n-1)/(n+1)$$
$$\operatorname{var}\left\{\sqrt{b_1}\right\} = 6(n-2)/(n+1)(n+3)$$
$$\operatorname{var}\left\{b_2\right\} = 24n(n-2)(n-3)/(n+1)^2(n+3)(n+5)$$

Así, se obtiene un nuevo estadístico alternativo a LM_1

$$ALM_1 = \sqrt{b_1}^2/\operatorname{var}\left\{\sqrt{b_1}\right\} + (b_2 - E\left\{b_2\right\})^2/\operatorname{var}\left\{b_2\right\}^a \sim \chi_2^2$$

Urzúa (1997) demostró que este estadístico es mejor para probar normalidad en los casos en que el tamaño de la muestra es pequeño y mediano. Además, su potencia es mejor que la de Bowman-Shenton y Jarque-Bera.

Dados los resultados, se consideraron las contrapartes individuales de la prueba ómnibus univariada ALM_1. El estadístico ajustado que mide la asimetría se define entonces como:

$$ALM_1 = \sqrt{b_1}^2/\mathrm{var}\left\{\sqrt{b_1}\right\}^a \sim \chi_1^2$$

y al estadístico ajustado que mide la kurtosis como:

$$ALM_2 = (b_2 - E\{b_2\})^2/\mathrm{var}\{b_2\}^a \sim \chi_1^2$$

Los resultados de esta prueba de normalidad aplicados a los datos en estudio se muestran en el cuadro 2.

Como puede observarse, para todos los casos la hipótesis de normalidad fue rechazada, pues los valores de ALM_p son mayores a 17.69, el valor crítico más alto que toma dicha prueba.

3.2. *Prueba Kolmogorov-Smirnov*

La prueba Kolmogorov-Smirnov compara las distribuciones de dos vectores de datos X_1 y X_2. La hipótesis nula para esta prueba es que X_1 y X_2 tienen la misma distribución y la hipótesis alternativa asume diferentes funciones de distribución.

Para realizar la prueba se comparó cada serie de rendimientos con series de datos que tienen una distribución *t-Student*. Antes de llevarla a cabo se estimaron por máxima verosimilitud los grados de libertad (v) para cada serie de datos. Los resultados se presentan en el cuadro 3.

El cuadro 4 contiene los resultados de la prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS). Si el resultado para una acción es uno, la hipótesis nula se rechaza, es decir, la serie tiene una función de densidad distinta a la estudiada. Se calcula el estadístico KS, y si este es cercano a uno, se puede concluir que las series en estudio no siguen la distribución *t-Student*. Por el contrario, si el valor es cercano a cero, se puede concluir que la función de densidad que siguen los datos es la *t-Student*. Las pruebas se hicieron con un nivel de significancia de 0.01.

4. Proceso de Lévy NIG y sus propiedades

La distribución NIG (Barndorff-Nielsen, 1997) fue introducida con el objeto de ajustar las series de datos del tamaño de partículas de arena descubiertas por Bangnold (1941). En esta sección se presentarán algunas definiciones y conceptos necesarios.

4.1. *Proceso de Lévy*

Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ en $\Re^d$ es un proceso de Lévy si las siguientes condiciones se satisfacen:

1.- Para cualquier $n \geq 1$ y $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes (propiedad de incrementos independientes e idénticamente distribuidos si las diferencias son iguales),
2.- $X_0 = 0$ a.s.,
3.- La distribución de $X_{s+t} - X_s$ no depende de s (propiedad de homogeneidad temporal o incrementos estacionarios),
4.- Es estocásticamente continuo,
5.- Existe $\Omega_0 \in F$ con $P[\Omega_0] = 1$ tal que, para cada $\omega \in \Omega_0, X_t(\omega)$ es continua por la derecha en $t \geq 0$ y tiene límite por la izquierda en $t > 0$.

Un proceso de Lévy en $\Re^d$ se le llama proceso de Lévy *d-dimensional.*

4.2. *Distribución normal inversa gaussiana*

La función de densidad hiperbólica generalizada (HG) tiene cinco parámetros, α que representa la forma o la inclinación de la curva de densidad, β el sesgo o simetría, μ es el parámetro de localización, δ el de escala comparable a la sigma en la distribución normal y, por último, λ, que caracteriza las subclases de esta función de densidad y, esencialmente, nos dice qué tan pesadas son las colas de la función de densidad. Las más conocidas son las funciones hiperbólica y la NIG, las cuales se originan cuando λ toma el valor de 1 o -1/2, respectivamente. La función de densidad de la HG es la siguiente:

$$d_{HG}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \alpha(\lambda, \alpha, \beta, \delta)(\delta^2 + (x-\mu)^2)^{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)/2}$$

$$K_{\lambda - \frac{1}{2}}\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)\exp(\beta(x-\mu)),$$

donde

$$\alpha(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda - \frac{1}{2}}\delta^\lambda K_\lambda\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)}$$

es la constante de normalización y K_υ es la función de Bessel modificada de tercer tipo con índice υ, que puede ser representada de la siguiente manera:

$$K_\upsilon(z) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty y^{\upsilon-1} \exp\left(-\tfrac{1}{2} z \left(y + y^{-1}\right)\right) dy$$

el dominio de variación de la función de densidad HG $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ está dado por

$$\lambda \in R, \mu \in R, \delta \geq 0, 0 \leq \alpha, \beta \in R$$

y

$$\begin{array}{llll} \delta \geq 0 & \alpha > 0 & \alpha^2 > \beta^2 & \text{si} \;\; \lambda > 0 \\ \delta > 0 & \alpha > 0 & \alpha^2 > \beta^2 & \text{si} \;\; \lambda = 0 \\ \delta > 0 & \alpha \geq 0 & \alpha^2 \geq \beta^2 & \text{si} \;\; \lambda < 0 \end{array}$$

Además si X es una variable aleatoria con función de densidad HG y parámetros $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, entonces cualquier transformación de la forma $Y = aX + b$ con $a \neq 0$ es de nuevo una variable con función de densidad HG y parámetros $\tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\alpha} = |a|^{-1}\alpha, \tilde{\beta} = |a|^{-1}\beta, \tilde{\delta} = |a|\delta$ y $\tilde{\mu} = a\mu + b$. De este resultado se deducen dos formas de parametrización que son: invariante en escala y localización, (χ, ξ), es decir, que no hay cambios bajo transformaciones afines,

$$\xi = \left(1 + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \chi = \frac{\beta}{\alpha}\xi$$

Lo que implica que el dominio para (χ, ξ) está dado por $0 \leq |\chi| < \xi < 1$.

La función de densidad HG también puede ser representada como una mezcla de una normal, la distribución inversa gaussiana generalizada (GIG),

$$GH(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = N(\mu + \beta z, z) \underset{z}{\Lambda} GIG(\lambda, \delta^2, \alpha^2 - \beta^2)$$

donde GH es la función de distribución hiperbólica generalizada, N la distribución normal y GIG la distribución inversa gaussiana generalizada.

Algunos de los casos particulares de la HG son los siguientes:

a) para $\lambda = 1$ y $\delta > 0$ se obtiene la distribución hiperbólica,
b) para $\lambda = 1, \delta = 0$ y $\beta = \mu = 0$ se obtiene la función de distribución Laplace,
c) para $\lambda < 0, \alpha = 0$ y $\beta = \mu = 0$ se obtiene la función de distribución *t-Student*.

Cuando

$$\delta \longrightarrow \infty \text{ y } \frac{\delta}{\alpha} \longrightarrow \sigma^2$$

se obtiene la función de densidad normal con media $\xi = \mu + \beta\sigma^2$ y varianza σ^2. Como se mencionó al principio, la NIG es un caso particular de la HG, la cual resulta de igualar $\lambda = -\frac{1}{2}$, cuya función de densidad es como sigue:

$$d_{NIG} = \frac{\alpha}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}}$$

Esta función de densidad también puede expresarse en términos de parámetros invariantes, si $\bar{\beta} = \delta\beta, \bar{\alpha} = \delta\alpha$, la función de densidad $NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta)$ expresada en esos parámetros es:

$$d_{\overline{NIG}} = \frac{\bar{\alpha}}{\pi\delta} \exp\left(\sqrt{\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2} + \bar{\beta}\frac{(x - \mu)}{\delta}\right) \frac{K_1\left(\bar{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}}$$

lo cual significa que si

$$X \sim NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta) \Leftrightarrow \frac{x - \mu}{\delta} \sim NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 0, 1)$$

donde

$$\bar{\beta} = \delta\beta,\ \bar{\alpha} = \delta\alpha \text{ y } \bar{\rho} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Las propiedades de convolución de la distribución GIG implican que la clase NIG es el único miembro de las distribuciones HG el cual es cerrado bajo convolución, es decir,

$$NIG(\alpha, \beta, \delta_1, \mu_1) * NIG(\alpha, \beta, \delta_2, \mu_2) = NIG(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2).$$

Esto y el que las colas de la NIG sean más flexibles fueron las razones por las que se eligió para modelar los logaritmos de los rendimientos de las acciones mexicanas. Para calcular los parámetros de la NIG de cada serie de datos se utilizó el método de máxima verosimilitud. Los resultados para cada serie se muestran en los cuadros 5.1 y 5.2, además del error estándar, el valor de la función de verosimilitud y el número de iteraciones que fueron necesarias para llegar al resultado.

La función de densidad NIG, también puede ser representada por medio de parámetros invariantes (cuadro 6), recuérdese que

$$X \sim NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu, \delta) \Leftrightarrow \frac{x-\mu}{\delta} \sim NIG(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 0, 1).$$

5. Resultados

En todos los casos se rechazó la hipótesis nula de normalidad con la prueba ómnibus. La hipótesis nula de distribución *t-Student* con la prueba KS se rechazó a un nivel de significancia del 1%, sólo en el caso AMTEL no se rechaza.

Se calcularon los parámetros de la NIG para cada una de las series, como se mencionó, se obtuvieron a través del método de máxima verosimilitud, los resultados están en el apartado 4.

En esta sección se presentan los resultados del cálculo de la función de distribución para cada acción al utilizar las funciones de distribución NIG y normal. También se muestran los resultados de la distribución empírica.

En el caso de la función de la NIG, la función de distribución se calculó con los valores de los parámetros obtenidos para cada una de ellas, por ejemplo, para la acción ALFA se calculó

$$F_{NIG}(X; 54.8658, 2.9337, .0079, -.0002) = P(X \leq x)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{54.8658}{\pi} \exp\left(.0079\sqrt{54.8658^2 - 2.9337^2} + \beta(s - (-.0002))\right)$$
$$\frac{K_1\left((54.8658)(.0079)\sqrt{1+\left(\frac{s-(-.0002)}{.0079}\right)^2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{s-(-.0002)}{.0079}\right)^2}} ds$$

Para la función de distribución normal los parámetros que se consideraron fueron la varianza y media muestral. Los resultados al comparar las distintas distribuciones se encuentran en el cuadro 7.

Como puede observarse, en todos los casos la función de densidad normal inversa gaussiana se ajusta mejor a las series de datos, de hecho la diferencia que existe entre el valor del histograma y la NIG es mínima y, en algunos casos, como en las series de SP&500, IPC, ICA, AMTEL, CEMEX, TELEVISA, TELMEX, etc. el ajuste es muy bueno, sin embargo, en otras series el ajuste parece no serlo tanto. No obstante, si comparamos con los resultados de la distribución normal, el ajuste es superior, por lo que se puede concluir que, en todos los casos, la NIG nos proporciona un mejor ajuste para las series de rendimientos de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores.

También se calculó la función de distribución de la *t-Student*, para AMTEL, comparándose con la función de densidad normal estándar y el histograma, para el caso de este último se estandarizaron los datos, es decir, a cada uno se le resto la media muestral y se dividió entre la desviación estándar muestral (ver cuadro 7).

El análisis comparativo de distribuciones se realizó de la siguiente manera. Se hicieron mil simulaciones de la distribución NIG y de la *t-Student* con los parámetros calculados para cada una de las series. Se aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov donde la hipótesis nula es que las series se distribuyen como *t-Student* (ver sección tres) o como NIG.

En el 37.83% de los casos la NIG resultó ser la distribución, el 2.7% resultó ser la *t-Student* (ver cuadro 4). En el 13.51% la NIG se presenta como un mejor ajuste a la *t-Student*. En el 45.94% la prueba no es contundente acerca de cual es la distribución.

6. Aplicaciones financieras

Antes que nada, debe mencionarse que la elección de un proceso estocástico no debe basarse sólo en criterios estadísticos (Ramírez, 2004), sino también en la experiencia del investigador. A continuación se presentan brevemente tres posibles aplicaciones del tipo de proceso que estudiamos en este artículo.

6.1. *Modelación neutral al riesgo con procesos de Lévy exponenciales*

En el modelo de Black y Scholes, la dinámica neutral al riesgo se describe mediante un movimiento browniano con *drift*

$$S_t = S_0 \exp(B_t^0),$$

donde

$$B_t^0 = (r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$$

Una clase de modelos neutrales al riesgo manejables con saltos que generalizan el modelo de Black y Scholes se puede obtener reemplazando el movimiento browniano con *drift* por un proceso de Lévy. Es decir, $S_t = S_0 \exp(rt + X_t)$ con X_t un proceso de Lévy.

La disponibilidad de fórmulas cerradas para la función característica de procesos de Lévy permite el uso de métodos de Fourier para valuación de opciones.

6.2. *Valor en Riesgo (VaR)*

Para el caso del *VaR* paramétrico supongamos que X_t es la variable aleatoria que representa las pérdidas de un portafolio y cuya función de densidad es conocida, por lo que la obtención del *VaR* en un tiempo T y a un nivel de significancia α se reduce a encontrar el valor crítico X_{t+T}^*, tal que:

$$P[X_t \leq X_{t+T}^*] = 1 - \alpha$$

El problema deja de ser sencillo cuando desconocemos la función de densidad que rige el comportamiento de la variable aleatoria, por lo que la aplicación de un modelo paramétrico tiene que, como primera etapa, encontrar la función de densidad más adecuada para la variable aleatoria. Además, se debe tener en cuenta que un portafolio está formado de, al menos, dos activos, por lo que primero se encuentra la distribución de cada activo, para después agregar los riesgos. La distribución conjunta tiene un mayor nivel de complejidad en todos los sentidos: el proceso para estimar los parámetros, el contraste de los resultados obtenidos y los cálculos numéricos. Es por este motivo que la atención se centra fundamentalmente en la obtención de modelos paramétricos para activos individuales. Una de las razones por la cual la función de densidad más utilizada es la normal, es que tiene resueltos tales problemas, tanto en el caso univariado como en el multivariado.

El problema de aceptar que la distribución normal sea la función que rige los cambios en los rendimientos de los activos introduce un nuevo elemento de riesgo. El cual existe, tanto en el caso en el que el modelo sobrevalore los riesgos como en el que los subvalore. La medida del *VaR* sirve para tomar decisiones tales como, las posiciones de negociación, la asignación de recursos de capital o la medición de los rendimientos ajustados al riesgo. Por lo tanto, suponer que la distribución asociada a los rendimientos sigue una variable aleatoria normal afecta las decisiones administrativas en un amplio sentido.

6.3. *Modelos de heterocedasticidad condicional*

Por lo general los modelos GARCH se representan como

$$r_t = \mu_t + a_t$$
$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

donde σ_t^2 es el proceso de la varianza. Los modelos GARCH existentes podrían enriquecerse con el uso de la NIG, como en el caso de los modelos NIG-S y ARCH (Jensen y Lunde, 2001).

7. Conclusiones

Después de comparar los resultados obtenidos al evaluar las funciones de distribución normal inversa gaussiana y normal con la distribución empírica (histograma) y las pruebas de Kolmogorov-Smirnov, se puede concluir que, la función de densidad NIG se ajusta mejor a la distribución empírica de los rendimientos de las acciones y, dado que se rechazó que la función subyacente a las series sea la función normal, se puede decir que el movimiento browniano no es la herramienta adecuada para modelar las series financieras mexicanas. Sin embargo, los procesos estocásticos estacionarios, sí pueden ser una alternativa para modelar esta clase de series, si se relaja el supuesto de normalidad.

El hacer esto nos lleva a utilizar procesos de Lévy más generales, así obtenemos modelos más acertados y eliminamos el riesgo de utilizar modelos no adecuados. La función de densidad que se propone en este estudio como una alternativa para modelar a las finanzas en México es la función normal inversa gaussiana, NIG.

Bibliografía

Amemiya, Takeshi (1985). *Advanced Econometrics*, Harvard University Press.

Atkinson, A. C. (1982). The Simulation of Generalized Inverse Gaussian and Hyperbolic Random Variables, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 3, núm. 4, 502-515.

Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation, *Annales de l'Ecole Normale Supériore*, 17, 21-86

Bagnold, R. A. (1941). *The Physics of Blown Sands and Deser Dunes*, Methuen, Londres (reimpreso en 1973, Chapman and Hall, Londres).

Barndorff-Nielsen, O. E., T. Mikosch y S. I. Resnick (2001). *Lévy Processes, Theory and Aplications*, Birkhäuser, EU.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). Processes of Normal Inverse Gaussian Type, *Finance and Stochastics*, 2, 41-68.

—— (1997). Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modeling, *Scandinavian Journal of Statistics*, 24, 1-13.

—— (1996). *Probability and Statistics Selfdecomposability, Finance and Turbulence*, Research Report 347, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

—— (1995). *Normal Inverse Gaussian Processes and the Modelling of Stock Returns*, Research Report 300, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

——, *et al.* (1983). *The Fascination of Sand*, Research Report 93, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

Barndorff-Nielsen, O. E. y P. Blæsild (1980). *Hyperbolic Distributions and Ramifications: Contributions to Theory and Application*, Research Report 68, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1978). Hyperbolic Distributions and Distributions on Hyperbolae, *Scandinavian Journal of Statistics*, 5, 151-157.

—— (1977). Exponentially decreasing log-size distributions, *Proceedings of the Royal Statistical Society, Series A*, 353, 401-419.

Barndorff-Nielsen, O. E. y C. Halgreen (1977). Infinite Divisibility of the Hyperbolic and Generalized Inverse Gaussian Distributions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw., *Gebiete*, 38, 309-312.

Blæsild, P. y M. K. Sørensen (1992). *"Hyp" -A Computer Program for Analyzing Data by Means of the Hyperbolic Distribution*, Research Report 248, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

Blæsild, P. (1990). *The Shape Cone of the d-Dimensional Hyperbolic Distribution*, Research Report 208, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

—— (1990). *Hyperbolic Distributions, Cumulants, Skewness and Kurtosis*, Research Report 209, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

Blattberg, R. C. y N. J. Gonedes (1971). *A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices*, Research Report, Graduate School of Business, University of Chicago.

Black, F. y M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Ecoonomy*, 81, 637-654.

Bibby, B. M. y M. K. Sørensen (1995). *A Hyperbolic Diffussion Model for Stock Prices*, Research Report 331, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

Bowman, K. O. y L. R. Shenton (1975). Omnibus Contours for Departures from Normality Based on $\sqrt{b_1}$ y $\sqrt{b_2}$, *Biometrika*, 62, 243-250.

Cont, R. y P. Tankov (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series, Reino Unido.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, 385-407.

Eberlein, E. y U. Keller (1995). Hyperbolic Distributions in Finance, *Bernoulli*, 1, 281-299.

Fisher, R. A. (1930). The Moments of the Distribution for Normal Samples of Measures of Departure from Normality, *Proceedings of the Royal Statistical Society, Series A*, 130, 16-28.

Ho, T. S. Y. y S. B. Lee (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Finance*, 41, 1011-1029.

Jarque, C. M. y A. K. Bera. (1987). A Test for Normality of Observations and Regression Residuals, *International Statistical Review*, 55, 163-172.

—— (1980). Efficient Test for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Residuals, *Economics Letters*, 6, 255-259.

Jensen, M. B. y A. Lunde (2001). *The NIG-S&ARCH Model: A Fat Tailed, Stochastic, and Autoregressive Conditional Heteroskedastic Volatility Model*, WP, núm. 83, Centre for Analytical Finance, University of Aarhus.

Pedersen, A. R. (1994). *Uniform Residuals for Discretely Observed Diffusion Processes*, Research Report 292, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

Ramírez, J. C. (2004). Usos y limitaciones de los procesos estocásticos en el tratamiento de distribuciones de rendimientos con colas gordas, *La Revista de Análisis Económico*, 19, 51-76.

Rydberg, T. H. (1996). *Generalized Hyperbolic Diffusions with Applications to Finance*, Research Report 342, Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Reino Unido.

Urzúa, C. M. (1997). Omnibus Test for Multivariate Normality Based on a Class of Maximum Entropy Distributions, *Advances in Econometrics*, 12, 341-358.

—— (1996). On the Correct Use of Omnibus Test for Normality, *Economics Letters*, 53, 247-251.

Vasicek, O. A. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.