DECISIONES DE LOS BANCOS COMERCIALES EN CONDICIONES DE RIESGO E INCERTIDUMBRE*

Abigail Rodríguez Nava
Universidad Autónoma Metropolitana - Xochimilco

Francisco Venegas Martínez
Instituto Politécnico Nacional

Resumen: Desarrollamos un modelo de optimización sobre las decisiones de un banco comercial representativo en un escenario con incertidumbre. En la propuesta los depósitos y créditos bancarios son conducidos por procesos estocásticos de difusión. Asimismo, se considera la probabilidad de que los clientes receptores de créditos incumplan con sus compromisos de pago. El modelo genera soluciones cerradas para las tasas de interés activa y pasiva que maximizan las ganancias del banco, de estas tasas se obtienen el margen financiero y el margen por riesgo. Por último, se realiza una aplicación para la banca comercial mexicana mediante simulación Monte Carlo.

Abstract: This paper develops an optimization model that describes the decision process of a representative commercial bank in an uncertain environment. In the proposed model the magnitude of deposits and bank loans are driven by diffusion stochastic processes. Moreover, the model considers instant default probabilities associated with customers receiving credits. The model generates closed-form solutions for the prices of the bank services that maximize its benefit, and from such prices the financial markup and the risk markup are obtained. Finally, an application of the model for Mexican commercial banks through Monte Carlo simulation is carried out.

Clasificación JEL/JEL Classification: D81, G21

Palabras clave/keywords: economía bancaria, probabilidad de incumplimiento, riesgo de crédito, economics of banking, default probability, risk credit.

Fecha de recepción: 14 I 2008 *Fecha de aceptación: 06 II 2009*

* Agradecemos las valiosas sugerencias y comentarios de los dictaminadores.
arnava@correo.xoc.uam.mx, fvenegas@ipn.mx.

1. Introducción

En la literatura económica y financiera, la formalización de las decisiones de los bancos comerciales se desarrolla de acuerdo con alguna de las siguientes líneas de investigación: *1*) explicación de la racionalidad de un banco comercial, *2*) determinación de soluciones de problemas asociados con los objetivos de un banco comercial, *3*) maximización de beneficios en presencia de información asimétrica, *4*) estrategias de competencia bancaria, *5*) estructura del sistema bancario y estructuras monopólicas y *6*) regulación bancaria o crisis sistémicas.

Con base en la teoría neoclásica de la empresa, la mayor parte de la literatura existente que estudia las decisiones racionales de los bancos comerciales centra su atención en explicar cómo este agente económico elige las cantidades óptimas de activos y pasivos, tomando como dadas las tasas de interés, ya sea que éstas se encuentren plenamente determinadas o sigan fluctuaciones estocásticas. Algunos modelos incluso incorporan la presencia de riesgos de mercado, de incumplimiento o de liquidez y analizan sus efectos en las decisiones óptimas del banco.

En este trabajo proponemos un modelo en el que se formaliza el proceso de optimización de beneficios de un banco comercial representativo en un ambiente de riesgo e incertidumbre. Se supone que el banco ofrece sus servicios en una estructura de mercado que se asemeja más a la de competencia imperfecta, porque existe información incompleta entre los agentes aunque es simétrica y, además, porque el banco comercial elige las tasas activa y pasiva óptimas. En nuestro modelo proponemos incorporar la presencia de incertidumbre a través de variaciones estocásticas de depósitos y créditos; la variación (porcentual) de cada uno de ellos, a lo largo del tiempo, puede representarse mediante una ecuación diferencial estocástica (movimiento geométrico browniano).

La representación estocástica de los depósitos y créditos bancarios constituye una primera aportación del modelo, como señalamos, la literatura existente, en su mayoría, se concentra en la elección de las cantidades óptimas de activos y pasivos tomando como dados los precios; en cambio, en nuestra investigación, el banco toma como dado el carácter estocástico de activos y pasivos y elige las tasas de interés activa y pasiva óptimas, lo que nos parece refleja, con más realismo, la actividad bancaria.

Asimismo, en el modelo consideramos la existencia del riesgo de crédito, el cual representamos a través de la probabilidad instantánea de incumplimiento del pago de los créditos otorgados. Es importante resaltar que, en la literatura financiera referente a la administración del riesgo de crédito, sólo se utiliza la probabilidad acumulada de incumplimiento para estimar las pérdidas esperadas o el monto de los créditos susceptibles de recuperación; en nuestra propuesta obtenemos la probabilidad instantánea de incumplimiento y, además, incorporamos esta medición en el problema de optimización de un banco comercial.

A partir de los dos supuestos anteriores (activos y pasivos estocásticos y existencia de probabilidad instantánea de incumplimiento), el modelo concluye en soluciones cerradas para las tasas activa y pasiva óptimas. Esto constituye un resultado fundamental de nuestra investigación, que complementa la escasa literatura al respecto, donde generalmente se rescata la aleatoriedad sólo de los pasivos y se concluye en soluciones numéricas particulares.[1]

Por último, con la finalidad de contar con una aplicación empírica, nuestro modelo proporciona una definición del margen financiero con base en las tasas activa y pasiva deducidas. Asimismo, sugerimos la simulación Monte Carlo para modelar las variaciones aleatorias de los activos y pasivos, y con base en dicha simulación se determinan las tasas activa y pasiva. De esta forma, a partir de niveles observados en algún momento del tiempo de los volúmenes de activos y pasivos, pueden deducirse los volúmenes futuros, así como las tasas de interés óptimas, acordes con la solución analítica del modelo.

La investigación está organizada de la siguiente forma: en la sección dos revisamos la literatura existente sobre la optimización de beneficios de los bancos comerciales, para ello, elegimos algunos modelos representativos del planteamiento tradicional (donde el banco determina las cantidades óptimas de depósitos y créditos); en la siguiente, discutimos sobre el balance contable básico de un banco comercial; en la cuatro, mostramos cómo se incluye en el modelo propuesto la probabilidad de incumplimiento para un momento específico del tiempo y la probabilidad instantánea de cumplimiento; en la quinta sección desarrollamos el problema de optimización del banco comercial que permite determinar los rendimientos óptimos de los créditos y depósitos; en la sección seis se examina el margen financiero; en la siete, mostramos un ejemplo de aplicación de nuestro modelo, basado en la simulación Monte Carlo, para el caso mexicano; y, por último, en la sección ocho presentamos las conclusiones de nuestra investigación.

---

[1] En la siguiente sección se detallan algunas de las características de los modelos representativos al respecto: Klein (1971), Dermine (1986), Boyd y de Nicoló (2003) y Bougheas y Ruiz (2008).

2. Antecedentes

El problema de modelar la decisión de optimización de ganancias de un banco comercial ha sido planteado en escenarios estáticos y dinámicos y, entre estos, en condiciones deterministas o de incertidumbre. Una de las propuestas pioneras fue la de Towey (1974). En su modelo, la actividad principal de los bancos es la creación de servicios de depósitos, los cuales dependen del ingreso real, de la tasa de interés del mercado, de los servicios adicionales que ofrece el banco, del costo de los servicios adicionales y de la demanda de depósitos de otros bancos. Asimismo, se supone que el banco central impone un requerimiento de reservas a los bancos comerciales. Con los supuestos anteriores, el modelo determina las ganancias de los bancos provenientes de ofrecer depósitos, otorgar créditos y servicios asociados. Para alcanzar las ganancias máximas, el ingreso marginal de los servicios de depósitos debe igualar al costo marginal. También se vinculan los servicios de depósitos (o la demanda de dinero global que se crea a través de la actividad bancaria) con la oferta de dinero que determina el banco central.

Uno de los modelos pioneros en la incorporación de incertidumbre es el de Tobin (1982). En su modelo, el banco comercial debe elegir el volumen de créditos que otorga y la cantidad de activos de inversión sin conocer el volumen de los depósitos con que cuenta. Se trata entonces de elegir un portafolio precautorio que maximice sus ganancias. El modelo también supone que la capacidad bancaria de retener depósitos depende del tamaño del banco en relación con los otros bancos existentes. Al igual que ocurre con las firmas, la decisión óptima para cada banco, se encuentre en una situación competitiva o monopolista, consiste en elegir la cantidad de activos y de pasivos tal que, para cada combinación de títulos, se verifique la igualdad entre ingreso marginal y costo marginal.

Por su parte, O'Hara (1983) considera en su modelo que, el administrador del banco comercial, maximiza la utilidad proveniente de los beneficios esperados considerando las exigencias de los accionistas (y su deseo de maximizar el rendimiento sobre capital) y de la regulación bancaria. El problema básico consiste en elegir la composición óptima de activos y pasivos considerando que los rendimientos son aleatorios y exógenos porque el banco enfrenta el riesgo de mercado y el riesgo de crédito. En equilibrio, el administrador elige la cantidad de fondos donde la utilidad marginal de su consumo iguala a la desutilidad marginal de su consumo futuro, también se elige la cantidad de activos que satisface la igualdad entre el rendimiento de estos y su costo marginal.

En la propuesta de Ratti (1980), el banco maximiza la utilidad esperada de sus beneficios eligiendo los volúmenes óptimos de créditos, valores gubernamentales y reservas. En este caso, el problema esencial consiste en ajustar esas cantidades suponiendo que el banco es un agente adverso al riesgo (su función de utilidad es cóncava), la incertidumbre respecto al volumen de los depósitos existentes en cada momento del tiempo y la presencia de riesgo de crédito exógeno.

Una propuesta novedosa es la de Rajan (1994), en la cual se busca explicar la maximización de las ganancias, pero asociada con la creación de una reputación dentro del mercado crediticio. Se supone que el propósito del banco comercial es que sus clientes lo reconozcan como facilitador del crédito y que sus competidores reconozcan sus habilidades para otorgar créditos riesgosos y obtener ganancias de estos.

Los modelos hasta ahora descritos son representativos de la forma tradicional de explicar el problema de la optimización de las ganancias bancarias, esto bajo el enfoque de la teoría de las organizaciones, en evidente asociación con la teoría neoclásica de la firma. Estos modelos centran su atención en la elección del banco de las cantidades óptimas de activos y pasivos, tomando como dadas las tasas de interés, sean éstas plenamente determinadas o aleatorias. También coinciden, excepto la propuesta de Towey (1974), en incluir la influencia de los riesgos en las decisiones de la banca comercial.

Respecto a la relevancia de la inclusión de los riesgos (de mercado, de crédito y operacionales), algunos autores como Allen y Santomero (1997) señalan que la presencia de riesgos no sólo influye en la toma de decisiones de la banca comercial, sino que la administración y la transferencia de riesgos se convierte progresivamente en una de sus funciones principales, aminorando la relevancia de la información asimétrica y de la existencia de costos de transacción. Esta posición contrasta con la de Scholtens y van Wensveen (2000), quienes subrayan que la administración y transformación de riesgos son el origen y la razón de ser de los bancos y de las instituciones financieras, no una cuestión de reciente importancia.

En la literatura económico-financiera existen pocas aportaciones donde se modela de forma aleatoria la variación de activos y pasivos y donde la elección del banco se centre en las tasas de interés. Al respecto, uno de los modelos básicos se debe a Klein (1971), en su propuesta los bancos poseen como activos: efectivo, bonos gubernamentales y títulos privados. Los pasivos del banco se componen por depósitos de corto y largo plazo. Se supone que el banco debe pagar una penalidad si no mantiene suficiente efectivo, pero obtiene un rendimiento seguro respecto a los bonos gubernamentales, y obtiene un rendimiento aleatorio exógeno de los títulos privados debido a que se sospecha el incumplimiento de las empresas privadas; Klein sólo supone que el rendimiento de los créditos (títulos privados) que otorga el banco siempre es menor que el establecido en el contrato de crédito, pero no se formaliza esa probabilidad de incumplimiento.

En el modelo de Klein (1971), la variable aleatoria relevante es el saldo de recursos que mantiene el banco (ingresos menos egresos), la cual se expresa a través de una función de densidad específica. En equilibrio, se determinan la tasa de rendimiento que se paga por los depósitos y la que debe recibir el banco de los títulos privados. Dermine (1986) extiende el modelo de Klein suponiendo que el banco otorga créditos con rendimiento incierto porque se sustentan en activos, propiedad de los prestatarios, cuyo valor al término del contrato es estocástico. En este contexto, Dermine analiza los siguientes casos: *1*) el cliente sí cumple sus compromisos de pago con el banco, *2*) el cliente incumple, pero el banco mantiene sus compromisos con otros clientes y *3*) el cliente incumple y el banco se ve obligado a caer en quiebra.

De mayor interés y afinidad con nuestra investigación son las propuestas de Boyd y de Nicoló (2003) y la de Bougheas y Ruiz (2008). En el primer caso, el argumento esencial es mostrar los mecanismos que conducen a que los bancos tomen más riesgos a medida que los mercados son más concentrados (existe menos competencia). Dichos mecanismos son: *1*) si la competencia disminuye, los bancos obtienen más ganancias incrementando las tasas activas, pero esto implica más riesgo de quiebra por parte de los prestatarios, además de que ellos eligen solicitar préstamos para financiar sus proyectos más riesgosos y *2*) si aumenta el número de bancos, las ganancias de cada uno de ellos disminuye, pero aumenta el costo de quiebra que a manera de seguro deben cubrir, lo que desincentiva la toma de riesgos. Aunque en la propuesta de los autores los bancos eligen los depósitos, y a partir de dichos depósitos eligen indirectamente los créditos (para satisfacer el balance bancario), lo relevante es que concluyen en resultados particulares para las tasas de interés activa y pasiva, porque dependen de la forma funcional de los créditos y de los depósitos.

En la propuesta de Bougheas y Ruiz (2008) se analizan distintos regímenes bancarios derivados del saldo de recursos que mantiene el banco en el corto y lago plazos, estos regímenes se forman por la combinación en pares de los casos solvencia, insolvencia, liquidez e iliquidez. Entre los elementos más interesantes del análisis destacan: *1*) los retiros de depósitos se comportan de forma aleatoria, porque se ven afectados por choques de liquidez y *2*) se utiliza optimización numérica para determinar los valores óptimos de reservas que debe mantener el banco para optimizar sus ganancias, esto considerando que la proporción de los depósitos retirados y la tasa de rendimiento de la cartera de inversión son variables aleatorias uniformes, y a partir de un conjunto dado de valores para las variables: tasa de interés de los depósitos de largo plazo, costo de liquidación temprana, costo de bancarrota, monto de los depósitos y el límite superior de la distribución del rendimiento de la cartera de inversión del banco.

En el transcurso de nuestra investigación se desarrollará un modelo que, como se ha señalado, complementa la literatura que supone aleatoriedad en los elementos del balance bancario, a diferencia de los modelos representativos, en nuestra propuesta se consideran activos y pasivos estocásticos, la formalización realizada permite concluir en soluciones analíticas generales.

3. El balance general bancario

El balance general de una institución bancaria obliga a que el valor de los activos coincida con el de los pasivos. Los activos son los títulos y bienes que le permiten al banco obtener utilidades y los pasivos son los títulos que le permiten obtener recursos financieros, los cuales implican el pago de rendimientos por parte del banco. Suponemos que los activos están constituidos por los préstamos o créditos que otorga el banco L, los valores o títulos V (suponemos que el banco posee sólo títulos gubernamentales G, aunque el rendimiento de estos r_G está asociado al rendimiento r_C de los títulos privados C) y las reservas R. Los pasivos se forman por depósitos D y capital bancario CB. En el cuadro 1 se expone en forma simplificada el balance general de un banco.

Cuadro 1

Balance general de un banco comercial

Activos	*Pasivos*
Préstamos otorgados L	Depósitos D
Valores V	Capital bancario CB
Reservas R	

En esta investigación suponemos que las magnitudes de los títulos gubernamentales, reservas y capital bancario en cada instante del tiempo son datos conocidos, sin embargo, suponemos que existe incertidumbre acerca de los depósitos y préstamos, además de que el rendimiento de estos últimos es incierto debido a la existencia de probabilidades de incumplimiento de pago por parte de los clientes a quienes el banco ha otorgado créditos.

4. Probabilidad instantánea de incumplimiento con tasa de recuperación nula

En el área de riesgo de crédito, la pérdida esperada por incumplimiento en un mundo neutral al riesgo, se estima a partir de equiparar el valor esperado de un título privado riesgoso con el valor esperado de un título similar gubernamental (libre de riesgo). Si se considera la siguiente notación:

$B_G(t,T)$ = precio de un título gubernamental en la fecha t,

$B_C(t,T)$ = precio de un título privado en la fecha t,

$r_G(t,T)$ = tasa de rendimiento entre t y T de un título gubernamental,

$r_C(t,T)$ = tasa de rendimiento entre t y T de un título privado,

VN = Valor nominal de títulos públicos y privados

y se supone la existencia de dos bonos con el mismo valor nominal y la misma madurez, entonces la diferencia entre el título privado y el público, es decir, la pérdida esperada por incumplimiento está dada por:

$$V(t,T) = B_G(t,T) - B_C(t,T) \tag{1}$$

En términos del valor presente de los títulos, considerando capitalización instantánea de interés, el diferencial de precios de los títulos es:

$$V(t,T) = VNe^{-r_G(t,T)(T-t)} - VNe^{-r_C(t,T)(T-t)} \tag{2}$$

En este caso, la pérdida esperada si no se presenta incumplimiento es:

$$v(t,T) = \frac{VNe^{-r_G(t,T)(T-t)} - VNe^{-r_C(t,T)(T-t)}}{VNe^{-r_G(t,T)(T-t)}} \tag{3}$$

Si se prescinde del valor nominal de los títulos, la ecuación anterior se reescribe como:

$$\begin{aligned} v(t,T) &= \frac{e^{-r_G(t,T)(T-t)} - e^{-r_C(t,T)(T-t)}}{e^{-r_G(t,T)(T-t)}} \\ &= 1 - e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)} \\ &= 1 - e^{-H(t,T)(T-t)} \end{aligned} \tag{4}$$

La ecuación (4) determina la probabilidad acumulada de incumplimiento de un título riesgoso, durante el periodo $T-t$, desde el inicio de vigencia del título en la fecha, t, hasta la fecha de valuación, T. Conviene señalar que en la deducción de la expresión (4) se asume que el incumplimiento de la empresa emisora del bono sigue un proceso Poisson, de hecho, en esta ecuación el término $-H(t,T)(T-t)$ puede interpretarse como la intensidad del proceso Poisson.

Una alternativa al cálculo anterior es evaluar la probabilidad de incumplimiento a partir de la fecha intermedia τ y hasta la fecha final T, es decir, suponiendo que $t < \tau < T$, esto se hace restando la probabilidad de incumplimiento durante $\tau - T$ a la probabilidad de incumplimiento durante $T-t$, es decir:

$$\begin{aligned} P(T-\tau) &= v(t,T) - v(t,\tau) \\ &= \left(1 - e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)}\right) - \left(1 - e^{r_G(t,\tau)(\tau-t) - r_C(t,\tau)(\tau-t)}\right) \\ &= v(t,T) - v(t,\tau) = -e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)} + e^{r_G(t,\tau)(\tau-t) - r_C(t,\tau)(\tau-t)} \\ &= v(t,T) - v(t,\tau) = -e^{-H(t,T)(T-t)} + e^{-H(t,\tau)(\tau-t)}, \end{aligned}$$

donde:

$$H(t,T)(T-t) = r_C(t,T)(T-t) - r_G(t,T)(T-t)$$

$$H(t,\tau)(\tau-t) = r_C(t,\tau)(\tau-t) - r_G(t,\tau)(\tau-t).$$

$P(T-\tau)$ describe la probabilidad de incumplimiento en el periodo $(T-\tau)$ cuando no existe recuperación de los créditos. En el mismo periodo la probabilidad de cumplimiento es:

$$Q(T-\tau) = 1 - P(T-\tau) = 1 + e^{-H(t,T)(T-t)} - e^{-H(t,\tau)(\tau-t)}$$

Para determinar la probabilidad instantánea de incumplimiento en la fecha específica τ suponemos que el periodo (t, T) está formado por una sucesión de fechas tal que en la vecindad de τ se encuentran las fechas τ_1, τ_2, y donde $t < \tau_1 < \tau < \tau_2 < T$, así $\tau_2 - \tau_1 = \tau$.

En este caso, podemos definir la probabilidad instantánea de incumplimiento como:

$$\begin{aligned}
P(\tau) &= v(t,T) - v(t,\tau_1) - v(\tau_2,T) \\
&= \left(1 - e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)}\right) - \left(1 - e^{r_G(t,\tau)(\tau-t) - r_C(t,\tau)(\tau-t)}\right) \\
&= \left(1 - e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)}\right) - \left(1 - e^{r_G(t,\tau_1)(\tau_1-t) - r_C(t,\tau_1)(\tau_1-t)}\right) \\
&\quad - \left(1 - e^{r_G(\tau_2,T)(T-\tau_2) - r_C(\tau_2,T)(T-\tau_2)}\right) \\
&= -e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)} + e^{r_G(t,\tau_1)(\tau_1-t) - r_C(t,\tau_1)(\tau_1-t)} \\
&\quad + e^{r_G(\tau_2,T)(T-\tau_2) - r_C(\tau_2,T)(T-\tau_2)} - 1 \\
&= -e^{-H(t,T)(T-t)} + e^{-H(t,\tau_1)(\tau_1-t)} + e^{-H(\tau_2,T)(T-\tau_2)} - 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Donde ahora:

$$H(t,\tau_1)(\tau_1 - t) = r_C(t,\tau_1)(\tau_1 - t) - r_G(t,\tau_1)(\tau_1 - t)$$

$$H(\tau_2,T)(T-\tau_2) = r_C(\tau_2,T)(T-\tau_2) - r_G(\tau_2,T)(T-\tau_2)$$

Por último, la probabilidad instantánea de sí cumplimiento puede definirse como:

$$Q(\tau) = 1 - P(\tau) = e^{-H(t,T)(T-t)} - e^{-H(t,\tau_1)(\tau_1-t)} - e^{-H(\tau_2,T)(T-\tau_2)} \tag{6}$$

Más adelante utilizaremos estos resultados para estimar las ganancias posibles del banco comercial. Observe que los créditos que otorga son estocásticos, pero también hay incertidumbre en el cumplimiento de sus clientes con los compromisos de pago contraídos.

5. Modelo de optimización de un banco comercial

El problema de optimización de un banco comercial consiste en maximizar el valor presente de los beneficios esperados Π_t, condicionado al conjunto de información relevante disponible F_0 y utilizando una tasa de descuento δ, es decir:

$$\text{Maximizar } \; \mathrm{E}\left\{ \int_0^{\infty} f\left(\Pi_t\right) e^{-\delta t} \,\mathrm{d}\, t \mid F_0 \right\}, \qquad 0 < \delta < 1 \tag{7}$$

junto con las restricciones:

$$\mathrm{d}\Pi_t = r_L \mathrm{d}\, L_t + r R_t + r_G G_t - r_D \mathrm{d}\, D_t - r_B C B_t \tag{8}$$

$$\mathrm{d}\, L_t = \mu_L L_t \,\mathrm{d}\, t + \sigma_L L_t \mathrm{d} W_t, \quad \mathrm{d} W_t(0, \mathrm{d}\, t) \tag{9}$$

$$\mathrm{d}\, D_t = \mu_D D_t \,\mathrm{d}\, t + \sigma_D D_t \,\mathrm{d}\, Z_t, \quad \mathrm{d}\, Z_t(0, \mathrm{d} t) \tag{10}$$

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d} W_t, \mathrm{d} Z_t) = \rho \mathrm{dt}, \quad \rho > 0 \tag{11}$$

donde:

r = Tasa de interés asociada a reservas bancarias,
r_L = Tasa de interés de préstamos (o créditos) bancarios,
r_G = Tasa de rendimiento de títulos gubernamentales,
r_D = Tasa de interés de depósitos bancarios,
r_B = Tasa de rendimiento del capital bancario,
L_t = Volumen de créditos otorgados en el tiempo t,
D_t = Volumen de depósitos recibidos en el tiempo t,
μ_L = Media de largo plazo de los créditos otorgados,
σ_L = Volatilidad de los créditos otorgados,
μ_D = Media de largo plazo de los depósitos recibidos,
σ_D = Volatilidad de los depósitos recibidos,
G = Volumen de títulos gubernamentales,
CB = Capital bancario,
R = Reservas bancarias,
$\mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{d}Z_t$ Movimientos brownianos estandarizados.

La función f se supone cóncava con primera y segunda derivadas continuas. La ecuación (8) expresa la evolución de los beneficios en el tiempo, estos dependen de los rendimientos positivos de los activos: préstamos, bonos gubernamentales y reservas bancarias y de los costos asociados con los pasivos (depósitos y capital bancario).[2] Las ecuaciones (9) y (10) expresan la fluctuación estocástica de los préstamos o créditos y de los depósitos, respectivamente. En (9) se indica que el volumen de créditos varía en cada instante del tiempo de acuerdo con un componente de tendencia o nivel promedio μ_L y un componente aleatorio $\sigma_L \, \mathrm{d}W_t$. De manera similar, el volumen de depósitos (10), varía de acuerdo con el componente tendencial μ_D y el término aleatorio $\sigma_D \, \mathrm{d}Z_t$. Con la expresión (11) se supone que los movimientos brownianos de los préstamos y los depósitos están correlacionados entre sí. Debe señalarse que se ha elegido formalizar la variación de los saldos existentes en cada instante del tiempo, de depósitos y de créditos, tomando como base el movimiento browniano, justamente porque así puede incluirse un componente tendencial y uno aleatorio en la ecuación que define su trayectoria.[3]

Para resolver el problema del banco comercial definimos:

---

[2] En el modelo propuesto se supone que las reservas en cada instante del tiempo son conocidas en lugar de determinarse como fracción de los depósitos, con ello se evita la especificación aleatoria de las reservas que sería necesaria como correspondencia con la variación de los depósitos. Respecto al rendimiento de las reservas bancarias, generalmente se supone que si éstas son requeridas por la autoridad monetaria, no devengan interés alguno, no obstante, en la propuesta puede suponerse que la tasa de interés r es positiva, pero tendiente a cero; si la tasa es nula esto significa, en el modelo, que las tasas óptimas son independientes de la magnitud de las reservas.

[3] En el modelo que se propone, el principal elemento recuperado de la literatura financiera moderna es la trayectoria estocástica del movimiento browniano, como se sabe, éste es la base de la valuación de la mayoría de los títulos de instrumentos financieros. En particular, dicho proceso estocástico ha sido adaptado en diferentes variantes para generar los modelos conocidos de la tasa de interés instantánea (Merton (1973), Vasicek (1977), Cox, Ingersoll y Ross (1985), Ho y Lee (1986), Hull y White (1990) y Longstaff (1989)), o bien para modelar las variaciones de otros precios; en nuestra propuesta adoptamos el movimiento geométrico browniano para modelar las fluctuaciones de los créditos y de los depósitos. Dado que nuestro interés es determinar las tasas óptimas (activa y pasiva) en su vinculación con los componentes del balance general bancario seguimos como metodología la optimización estocástica, en lugar de las metodologías alternativas de los modelos APT (*Arbitrage Pricing Theory*) o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*).

$$
\begin{aligned}
J(L_t,D_t,t) &= \max \mathrm{E}\Big\{ \int_t^T f(\Pi_s)\, e^{-\delta s} \mathrm{d}s \mid F_t \Big\} \\
&= \max \mathrm{E}\Big\{ \int_t^{t+dt} f(\Pi_s)\, e^{-\delta s} \mathrm{d}s + \int_{t+dt}^T f(\Pi_s) e^{-\delta s} \mathrm{d}s \mid F_t \Big\} \qquad (12) \\
&= \max \mathrm{E}\Big\{ \int_t^{t+dt} f(\Pi_s)\, e^{-\delta s} \mathrm{d}s + J(L_t+\mathrm{d}L_t, D_t+\mathrm{d}D_t, t+\mathrm{d}t) \mid F_t \Big\}
\end{aligned}
$$

Si se utilizan el teorema del valor medio para integrales definidas y la expansión en series de Taylor alrededor de (L_t, D_t, t) se sigue que:

$$
J(L_t,D_t,t) = \max \mathrm{E}\big\{ f(\Pi_t) e^{-\delta t} \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + J(L_t,D_t,t) + \mathrm{d}\,J(L_t,D_t,t) \mid F_t \big\}
$$

donde $o(\mathrm{d}t)$ es tal que $o(\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t \to 0$ cuando $\mathrm{d}t \to 0$. Si aplicamos el lema de Itô para una función de dos variables conducidas por ecuaciones diferenciales estocásticas, podemos encontrar la diferencial total de la función $J(L_t, D_t, t)$, asociada a los dos factores de riesgo, $\mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{d}Z_t$, como:[4]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}J(L_t, D_t, t) = {} & J_t \mathrm{d}t + J_L \mu_L r_L L_t \mathrm{d}t + \frac{1}{2} J_{LL} \sigma_L^2 r_L^2 L_t^2 \mathrm{d}t + J_D \mu_D r_D D_t \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2} J_{DD} \sigma_D^2 r_D^2 D_t^2 \mathrm{d}t + J_{LD} \sigma_L r_L L_t \rho \sigma_D r_D D_t \mathrm{d}t \\
& + J_L \sigma_L r_L L_t \mathrm{d}W_t + J_D \sigma_D r_D D_t \mathrm{d}Z_t
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
J(L_t,D_t,t) = \max \mathrm{E}\Big\{ & f(\Pi_t) e^{-\delta t} + o(dt) + J(L_t,D_t,t) + \big(J_t + J_L \mu_L r_L L_t + \tfrac{1}{2} J_{LL}\, \sigma_L^2 r_L^2 L_t^2 \\
& + J_D \mu_D r_D D_t + \tfrac{1}{2} J_{DD} \sigma_D^2 r_D^2 D_t^2 + J_{LD} \sigma_L r_L L_t \rho \sigma_D r_D D_t \big) \mathrm{d}t \qquad (13) \\
& + J_L \sigma_L r_L L_t \mathrm{d}W_t + J_D \sigma_D r_D D_t \mathrm{d}Z_t \;\Big|\; F_t \Big\}
\end{aligned}
$$

[4] Véase el anexo A sobre el lema de Itô para determinar la diferencial de una función que depende de dos variables conducidas por ecuaciones diferenciales estocásticas.

donde los subíndices de J_t, J_L, J_D, J_DD, J_LL, J_LD, denotan las primeras o segundas derivadas parciales de la función $J(L_t, D_t, t)$. Con el fin de incorporar en el ejercicio de optimización los componentes del balance bancario que sólo dependen del tiempo, es decir, las reservas R, los títulos gubernamentales G y el capital bancario CB, reescribimos las ecuaciones (9) y (10):

$$\mathrm{d}L_t = L_t\left(\mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{r_G G_t}{L_t}\right)\mathrm{d}t + \sigma_L L_t \mathrm{d}W_t \qquad \mathrm{d}W_t(0, \mathrm{d}t) \quad (14)$$

$$\mathrm{d}D_t = D_t\left(\mu_D + \frac{r_B CB_t}{D_t}\right)\mathrm{d}t + \sigma_D D_t \mathrm{d}Z_t \qquad \mathrm{d}Z_t(0, \mathrm{d}t) \quad (15)$$

A diferencia de la ecuación (9), en (14) la variación de la cantidad de créditos se asocia con la variación de los pasivos reservas y títulos gubernamentales, y en la ecuación (15), a diferencia de (10), la variación de los depósitos se asocia con los cambios en el capital bancario, esto es un supuesto del modelo que nos permite incluir estas variables en el problema de optimización. Evidentemente, en términos contables, la única condición que debe mantenerse es que el valor total de los activos iguale al de los pasivos en cada instante del tiempo, pero no todos los activos (ni todos los pasivos) varían necesariamente en el mismo sentido.

Si se considera la esperanza matemática de (13) y se incorporan en ésta (14) y (15), se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), la cual expresa la condición necesaria de un máximo:

$$0=\Bigg\{f(\Pi_t)e^{-\delta t}+\Bigg[J_t+J_L r_L L_t\left(\mu_L+\frac{rR_t}{L_t}+\frac{r_G G_t}{L_t}\right)+\frac{1}{2}J_{LL}\sigma_L^2 r_L^2 L_t^2 \quad (16)$$

$$+J_D r_D D_t\left(\mu_D+\frac{r_B CB_t}{D_t}\right)+\frac{1}{2}J_{DD}\sigma_D^2 r_D^2 D_t^2+J_{LD}\sigma_L r_L L_t \rho \sigma_D r_D D_t\Bigg]\mathrm{d}t\Bigg\}\equiv HJB$$

En la ecuación (16) queda resumido el problema de optimización del banco comercial. El objetivo es maximizar el valor presente de las ganancias esperadas, para lo cual elegirá las tasas de interés óptimas (activa y pasiva), considerando como restricciones la evolución de activos y pasivos. A partir de la ecuación de HJB, y suponiendo que $f(\Pi_t)$ se mantiene constante en el instante dt, obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial HJB}{\partial r_L}=J_L L_t\left(\mu_L+\frac{rR_t}{L_t}+\frac{r_G G_t}{L_t}\right)+J_{LL}\sigma_L^2 r_L L_t^2+J_{LD}\sigma_L L_t \rho\sigma_D r_D D_t=0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial HJB}{\partial r_D}=J_D D_t\left(\mu_D+\frac{r_B CB_t}{D_t}\right)+J_{DD}\sigma_D^2 r_D D_t^2+J_{LD}\sigma_L r_L L_t \rho\sigma_D D_t=0 \tag{18}$$

Proponemos como candidato solución de la ecuación (16) a la función:

$$J=\frac{1}{\delta}L_t^{\alpha}D_t^{1-\alpha}e^{-\delta t} \qquad 0<\alpha<1. \tag{19}$$

A partir de la ecuación anterior obtenemos:

$$J_t=-L_t^{\alpha}D_t^{1-\alpha}e^{-\delta t},$$

$$J_L=\frac{\alpha}{\delta}L_t^{\alpha-1}D_t^{1-\alpha}e^{-\delta t},$$

$$J_D=\frac{1-\alpha}{\delta}L_t^{\alpha}D_t^{-\alpha}e^{-\delta t},$$

$$J_{LL}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{\delta}L_t^{\alpha-2}D_t^{1-\alpha}e^{-\delta t},$$

$$J_{DD}=-\frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta}L_t^{\alpha}D_t^{-\alpha-1}e^{-\delta t},$$

$$J_{LD}=\frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta}L_t^{\alpha-1}D_t^{-\alpha}e^{-\delta t}.$$

Si se sustituyen estas derivadas parciales en (17) y (18), tenemos:

$$\frac{\alpha}{\delta}L_t^{\alpha-1}D_t^{1-\alpha}e^{-\delta t}L_t\left(\mu_L+\frac{rR_t}{L_t}+\frac{r_G G_t}{L_t}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\delta}L_t^{\alpha-2}D_t^{1-\alpha}e^{-\delta t}\sigma_L^2 r_L L_t^2$$

$$=-\frac{\alpha(1-\alpha)}{\delta}L_t^{\alpha-1}D_t^{-\alpha}e^{-\delta t}\sigma_L L_t\rho\sigma_D r_D D_t$$

Si se simplifica la expresión anterior, se sigue que:

$$\left(\mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{r_G G_t}{L_t}\right) + (\alpha - 1)\sigma_L^2 r_L = -(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D \qquad (20)$$

A partir de (18) se tiene:

$$\tfrac{1-\alpha}{\delta} L_t^{\alpha} D_t^{-\alpha} e^{-\delta t} D_t \left(\mu_D + \tfrac{r_B C B_t}{D_t}\right) - \tfrac{\alpha(1-\alpha)}{\delta} L_t^{\alpha} D_t^{-\alpha-1} e^{-\delta t} \sigma_D^2 r_D D_t^2$$

$$= - \tfrac{\alpha(1-\alpha)}{\delta} L_t^{\alpha-1} D_t^{-\alpha} e^{-\delta t} r_L \sigma_L L_t \rho \sigma_D D_t$$

Si la expresión anterior se simplifica, se tiene que:

$$\left(\mu_D + \frac{r_B C B_t}{D_t}\right) - \alpha \sigma_D^2 r_D = -\alpha \sigma_L r_L \rho \sigma_D \qquad (21)$$

La ecuación (20) proviene de la optimización de la tasa de interés que debe recibir el banco de los créditos que otorga. Con el fin de interpretar este resultado recuperamos la ecuación (4) de la tercera sección, es decir, definimos la probabilidad acumulada de incumplimiento de un título riesgoso como:

$$v(t,T) = 1 - e^{r_G(t,T)(T-t) - r_C(t,T)(T-t)}$$

De lo anterior podemos obtener ahora que:

$$r_G = \ln\left[1 - v(t,T)\right] + r_C, \qquad (22)$$

donde la tasa de los títulos gubernamentales se expresa en términos de la probabilidad acumulada de incumplimiento de los títulos privados. Como nos interesa la probabilidad instantánea, no la acumulada, a partir de (5) se obtiene:

$$v(t,T) = P(\tau) + v(t,\tau_1) + v(\tau_2, T).$$

Si se utiliza este cambio de variable en (22) se sigue que:

$$r_G = \ln\left[1 - P(\tau) - \nu(t,\tau_1) - v(\tau_2,T)\right] + r_C \qquad (23)$$

o bien,

$$r_G = \ln\left[Q(\tau) - \nu(t,\tau_1) - v(\tau_2,T)\right] + r_C \qquad (24)$$

En (24) se muestra el rendimiento de los títulos gubernamentales en términos de la probabilidad instantánea de cumplimiento, $Q(\tau)$, de los títulos privados. Ahora encontramos los determinantes de la tasa crédito. A partir de (20) resolvemos para r_L:

$$r_L=\left[-(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D-\left(\mu_L+\frac{rR_t}{L_t}+\frac{r_G G_t}{L_t}\right)\right]\left[(\alpha-1)\sigma_L^2\right]^{-1} \tag{25}$$

Si sustituimos en la expresión anterior (24) entonces:

$$r_L=\left[(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D-\left(\frac{\mu_L+rR_t}{L_t}+\frac{[\ln(Q(\tau)-v(t,\tau_1)-v(\tau_2,T))+r_C]G_t}{L_t}\right)\right]\left[(\alpha-1)\sigma_L^2\right]^{-1}$$

Ahora, suponiendo que el rendimiento de los títulos privados riesgosos equivalen justamente al rendimiento de los créditos que el banco otorga, es decir, $r_C=r_L$, entonces:

$$r_L=\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D+\mu_L+\frac{rR_t}{L_t}+\frac{G_t\ln(Q(\tau)-\nu(t,\tau_1)-v(\tau_2,T))}{L_t}}{(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right] \tag{26}$$

Por lo tanto, la tasa de créditos óptima depende de las siguientes variables y signos (las condiciones bajo las cuales se obtienen estos signos se muestran en el anexo B):

$$r_L=f\left(\overset{-}{G}_t,\overset{-}{L}_t,\overset{-}{R}_t,\overset{-}{\sigma}_L,\overset{-}{\sigma}_D,\overset{-}{r}_D,\overset{-}{Q}(t),\overset{+}{P}(t)\right) \tag{27}$$

Es decir, la tasa de créditos óptima tiende a aumentar cuando se incrementa la probabilidad instantánea de incumplimiento. La tasa de los créditos se reduce si aumentan: *1*) la cantidad de reservas y títulos públicos que el banco posee, *2*) la demanda de créditos y la volatilidad de estos, *3*) la volatilidad de los depósitos y la tasa pasiva y *4*) la probabilidad de cumplimiento instantáneo de los créditos. Es importante resaltar que, si los rendimientos de las reservas bancarias son nulos, entonces en los resultados (26) y (27) la tasa activa óptima ya no depende de la variación en las reservas.

Para determinar la tasa pasiva óptima observe que a partir de (21):

$$r_D=\frac{\alpha\sigma_L r_L\rho\sigma_D+\left(\mu_D+\frac{r_B CB_t}{D_t}\right)}{\alpha\sigma_D^2} \tag{28}$$

Por lo tanto,

$$r_D = f\left(\overset{+}{CB_t}, \overset{-}{D_t}, \overset{+}{\sigma_D}, \overset{+}{\sigma_L}, \overset{+}{r_L}\right) \tag{29}$$

La tasa de interés para los depósitos bancarios es una función decreciente de los depósitos, del capital bancario y de la volatilidad de los depósitos.

En los resultados (26) y (28) se tiene una idea relevante: las tasas de interés pasiva y activa dependen una de la otra, no obstante en (27) se muestra que el incremento de la tasa pasiva reduce la magnitud de la tasa activa, lo cual sólo es posible bajo el supuesto de que el incremento en el rendimiento del pasivo es superado por el rendimiento de otros activos. En cambio, en (29), se exhibe la vinculación positiva entre ambas tasas, puede interpretarse que el incremento en el rendimiento que se obtiene por los créditos permite al banco comercial elevar el rendimiento que otorga a sus depositantes.

Es conveniente también señalar que los resultados muestran "la propiedad de independencia" entre los precios y cantidades de títulos diferentes, esto es, la tasa activa óptima es independiente de la cantidad de depósitos y la tasa pasiva óptima es independiente de la cantidad de créditos aunque, como se indicó, el escenario en el que opera el banco comercial representativo se asemeja a la competencia imperfecta, porque existe información imperfecta y porque este agente posee la facultad de determinar los precios de los servicios que ofrece.

En los casos de competencia imperfecta donde predominan elementos de rigideces de precios, información asimétrica o estructuras de mercado monopólicas es común que exista interdependencia entre precios y cantidades, o interdependencia entre las cantidades de algunos pasivos y activos, este hecho ha propiciado el desarrollo de investigaciones respecto a la regulación bancaria y a las mejores prácticas de administración de activos y pasivos (conocidas como *Assets-Liabilities Managing*, ALM). La administración bancaria conlleva a orientar la composición del balance general contemplando, por el lado de los activos, la selección de aquellos que proporcionen adecuada liquidez y niveles de riesgo aceptables y, por el lado de los pasivos, optar por la obtención de fondos a bajo costo.[5]

[5] La propiedad de independencia es más conocida en la teoría tradicional de la firma, en donde se señala que, bajo competencia perfecta, el costo marginal es independiente de los niveles de producción, y que las cantidades producidas en un mercado no se alteran por variaciones producidas en otros mercados.

6. Margen financiero, margen por riesgo y procesos Poisson

En esta sección desarrollamos tres vertientes que muestran las posibilidades del banco comercial para estimar sus ingresos considerando la probabilidad de incumplimiento en los créditos que otorga.

6.1. *Margen financiero*

El margen financiero se define como la diferencia entre los ingresos obtenidos por el cobro de intereses y los gastos resultantes del pago de intereses. Esta definición se ajusta a la ecuación de ganancias del banco comercial (8). Si se suponen conocidos los rendimientos de los títulos gubernamentales r_G, del capital bancario r_B y de las reservas bancarias r, y dados el volumen de créditos y depósitos en un momento determinado, entonces al utilizar la tasa óptima de préstamos (suponiendo ausencia de incumplimiento) r_L dada en (25) y la tasa óptima de depósitos r_D dada en (28) obtenemos:

$$\begin{aligned} M_a &= rR_t + r_G G_t + r_L L_t - r_D D_t - r_B CB_t \qquad (30) \\ &= \left[\frac{(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D L_t + \mu_L L_t + (rR_t + r_G G_t)(1+\sigma_L^2 - \alpha\sigma_L^2)}{(1-\alpha)\sigma_L^2}\right] \\ &- \left[\frac{\alpha\sigma_L r_L \rho\sigma_D D_t + \mu_D D_t + r_B CB_t(1+\alpha\sigma_D^2)}{\alpha\sigma_D^2}\right] \end{aligned}$$

En (30) se muestra el margen financiero M_a suponiendo ausencia de incumplimiento. El margen financiero considerando la probabilidad de incumplimiento M_b se obtiene de manera similar, pero suponiendo la tasa óptima de préstamos definida en (26):

$$\begin{aligned} M_b = rR_t + r_G G_t + \left[\frac{(1-\alpha)\sigma_L \rho\sigma_D r_D L_t + \mu_L L_t + rR_t + G_t \ln[1-P(t)-\nu(t,\tau_1)-v(\tau_2,T)]}{(1-\alpha)\sigma_L^2\left[L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2\right]}\right] \qquad (31) \\ - \left[\frac{\alpha\sigma_L r_L \rho\sigma_D D_t + \mu_D D_t + r_B CB_t(1+\alpha\sigma_D^2)}{\alpha\sigma_D^2}\right] \end{aligned}$$

Alternativamente, el margen financiero ajustado por riesgo crediticio M_c se obtiene como el margen financiero más la estimación preventiva para riesgos crediticios, la cual se define como la proporción del crédito que se espera no será recuperado, entonces, de acuerdo con nuestro modelo:[6]

$$M_c = M_a + L_t P(t) \tag{32}$$

A partir de (30), (31) y (32) se observa que el margen financiero se incrementa con los volúmenes de créditos, L_t, reservas, R_t, títulos públicos, G_t, y con la media de largo plazo de los créditos otorgados, μ_L, la volatilidad de los depósitos, σ_D, la covarianza entre las variaciones aleatorias de créditos y depósitos, ρ, y (en las ecuaciones (31) y (32)) con la probabilidad de incumplimiento de los créditos otorgados $P(t)$.

6.2. *Margen por riesgo*

Bierman y Hass (1975) propusieron definir el margen por riesgo, como la diferencia entre la tasa de interés de un préstamo riesgoso y la tasa de un préstamo sin riesgo. Ambos mostraron, a partir de la valuación de un bono cupón cero, que este margen es independiente de las características del título riesgoso, particularmente de su madurez, asimismo, obtuvieron que, entre mayor sea la probabilidad de sí cumplimiento de las obligaciones contractuales (o menor probabilidad de incumplimiento), la tasa requerida en el bono riesgoso disminuye. Más adelante Yawitz (1977) confirmó estos resultados utilizando en su análisis bonos cuponados. Si se utiliza el concepto de margen por riesgo M_d, a partir de las ecuaciones (25) y (26), éste se obtiene como:

$$M_d = \left\{ \frac{(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D + \mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{G_t \ln(1-P(t)-\nu(t,\tau_1)-v(\tau_2,T))}{L_t}}{(1-\alpha)\sigma_L^2} \right\} \left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2} \right]$$

$$- \left[-(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D - \left(\mu_L + \frac{rR_t}{L_t} + \frac{r_G G_t}{L_t} \right) \right] \left[(\alpha-1)\sigma_L^2 \right]^{-1} \tag{33}$$

[6] En México, el concepto de margen financiero ajustado por riesgo crediticio se determinó por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), los bancos comerciales están obligados a reportarlo como parte de sus estados financieros. Al respecto pueden consultarse el *Boletín B6* de la circular única de bancos de la CNBV, las reglas para la calificación de la cartera crediticia de las instituciones de banca múltiple y las reglas para la calificación de la cartera crediticia de las sociedades nacionales de crédito e instituciones de banca de desarrollo, ambas emitidas por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

$$= \left\{ \frac{(1-\alpha)\sigma_L \rho \sigma_D r_D + \mu_L + r R_t / L_t}{(1-\alpha)\sigma_L^2} \right\} \left\{ \frac{L_t}{L_t - G_t (1-\alpha)\sigma_L^2} - 1 \right\} - \frac{r_G G_t / L_t}{(1-\alpha)\sigma_L^2}$$

$$+ \frac{G_t \ln(1 - P(t) - \nu(t, \tau_1) - v(\tau_2, T))}{(1-\alpha)\sigma_L^2 (L_t - G_t (1-\alpha)\sigma_L^2)}$$

En este caso, el margen por riesgo también es una función creciente de la probabilidad de incumplimiento.

6.3. *Procesos de Poisson*

A partir del análisis de Bierman y Hass (1975) y de la extensión de Yawitz (1977) puede deducirse que, si el incumplimiento de los clientes del banco sigue un proceso Poisson, entonces el margen por riesgo es equivalente a la intensidad del proceso Poisson.

Dados dos títulos similares (con el mismo valor nominal y la misma madurez), uno libre de riesgo de incumplimiento y otro sujeto a riesgo, y siendo r_L^a la tasa de rendimiento del título riesgoso, r_L^b la tasa de rendimiento del título libre de riesgo y λ la intensidad del proceso Poisson, entonces se cumple que:

$$VNe^{-r_L^a} = VNe^{-r_L^b} \left(e^{-\lambda} \right),$$

$$r_L^a - r_L^b = \lambda. \tag{34}$$

Es decir, la diferencia entre el rendimiento del título riesgoso y el rendimiento del título libre de riesgo es la intensidad del proceso Poisson. También puede afirmarse que si la tasa de incumplimiento sigue una distribución de Poisson, entonces la tasa de incumplimiento esperada X es:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

Si se hace el cambio de variable $y = x - 1$ se tiene que:

$$\mathrm{E}[Y] = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!},$$

donde

$$e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}=1,$$

entonces

$$\mathrm{E}[X]=\lambda. \tag{35}$$

Así, el incumplimiento esperado es justamente la intensidad del proceso Poisson. La probabilidad de incumplimiento se estima como:

$$\mathrm{P}(X>0)=1-\mathrm{P}(X=0),$$

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}=e^{-\lambda},$$

$$\mathrm{P}(X>0)=1-e^{-\lambda}. \tag{36}$$

El incumplimiento esperado, dado que existe una probabilidad de incumplimiento, es:

$$\mathrm{E}[X|X>0]=\frac{\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}{\mathrm{P}(X>0)}.$$

$$=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \tag{37}$$

Las ecuaciones (34) a (37) muestran la obtención del margen por riesgo y de conceptos asociados cuando se supone que el incumplimiento puede describirse mediante una distribución de probabilidad específica.

7. Simulación Monte Carlo

En esta sección realizamos una aplicación del modelo propuesto en las secciones anteriores. Asimismo, determinamos las tasas óptimas de rendimiento. Elegimos como las principales variables, los saldos totales del financiamiento otorgado por la banca comercial y la captación colocada del público en México; ambas series de forma mensual entre diciembre de 2000 y diciembre de 2007.[7]

Los saldos nominales se convirtieron a pesos constantes con año base del 2005 y se obtuvieron las variaciones mensuales. Las ecuaciones (9) y (10) pueden reescribirse en términos discretos como:[8]

$$L_t = L_{t-1} + \mu_L \Delta t + \sigma_L W_t, \quad \text{donde} \quad W_t = \sqrt{\Delta t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \tag{38}$$

$$D_t = D_{t-1} + \mu_D \Delta t + \sigma_D Z_t, \quad \text{donde} \quad Z_t = \sqrt{\Delta t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \tag{39}$$

En estas ecuaciones, L_t y D_t no representan volúmenes, sino tasas de variación. La tasa de variación inicial, la volatilidad constante y la media de largo plazo se obtienen mediante un análisis estadístico de las series construidas a partir de las ecuaciones:

$$L_t = \mu_L + L_{t-1} + \varepsilon_t \tag{40}$$

$$D_t = \mu_D + D_{t-1} + \varepsilon_t \tag{41}$$

Podemos suponer que los estimadores hallados son tales que: $\hat{\alpha}_0 = \mu_L$, $\hat{\beta}_0 = \mu_D$. En el cuadro 2 se resumen los valores de los parámetros utilizados.

Cuadro 2

Parámetros utilizados en los procesos estocásticos

Activos	*Pasivos*
$\sigma_L = 2.0099$	$\sigma_D = 2.4143$
$\hat{\alpha}_0 =0.29921751$	$\hat{\beta}_0 = 0.37224602$
$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.01$

[7] La información cuantitativa relativa a los activos y pasivos de la banca comercial se obtuvo del Banco de México en su página http://www.banxico.gob.mx. Alternativamente, puede encontrarse información similar en el portal de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, http://www.cnbv.gob.mx. Los autores ofrecen a los lectores interesados un archivo en Excel para facilitar la replicación de los cálculos.

[8] Para realizar la simulación Monte Carlo se utilizó como base la metodología sugerida para la calibración y simulación de la tasa corta de interés en Venegas Martínez (2008).

Una vez obtenidos los valores de los parámetros necesarios, efectuamos la simulación Monte Carlo de las ecuaciones (38) y (39). Para el término de error que se distribuye como variable aleatoria normal estandarizada, generamos n series cada una de 10,000 números aleatorios con distribución uniforme; a partir de estos obtenemos los números aleatorios con la distribución normal deseada utilizando el método Box-Muller:

$$x = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2) \quad \text{y} \quad = \sqrt{-2\ln U_1}\mathrm{sen}(2\pi U_2)$$

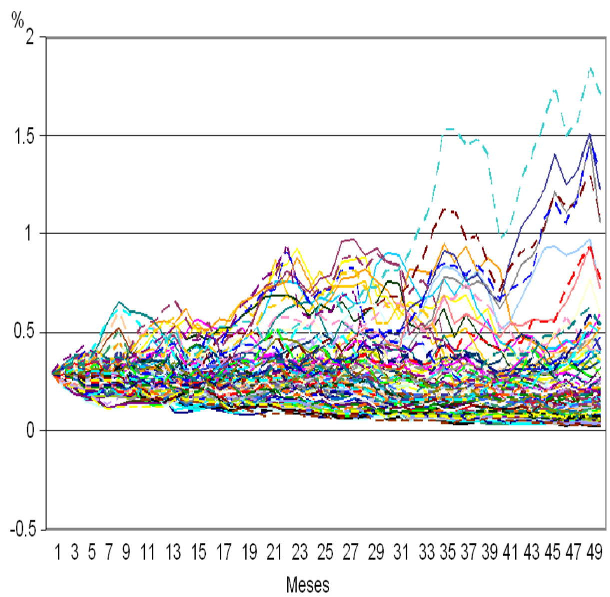
La simulación Monte Carlo del modelo desarrollado permite estimar el valor (o la variación) de los créditos o depósitos para un periodo deseado. En el ejercicio que efectuamos, dada una variación inicial de los créditos de 28.870042%, el promedio de 100 trayectorias simuladas para un periodo de 50 meses arroja como estimación una variación de 29.285883%, y dada la variación inicial de los depósitos de 30.169574%, se obtiene como estimación una variación de 29.043677%.

Estos resultados evidencian que el modelo desarrollado en las secciones previas, para la evolución de los créditos y depósitos de la banca comercial, permite aproximaciones cercanas a los datos observados, aunque en términos prácticos el ejercicio de simulación podría mejorarse si se dispusiera de observaciones diarias, ya que esto reduciría la varianza de cada serie. No obstante, la principal limitación del uso práctico del modelo se encuentra en los supuestos utilizados, se trata de un escenario donde existe información imperfecta, los bancos comerciales pueden determinar los precios óptimos de los servicios que ofrecen, pero, sobre todo, se supuso que los bancos existentes son similares en sus decisiones, en su tamaño y en la composición de su balance general (una situación muy distinta a la de la banca comercial con actividades en México).

El modelo propuesto, también permite estimar las tasas activa y pasiva óptimas para alguna fecha específica, resolviendo el sistema de ecuaciones (25) y (28) en ausencia de riesgo de incumplimiento, o bien, el sistema formado por las ecuaciones (26) y (28) si existe ese riesgo. Si consideramos como base los datos observados de la banca comercial en México correspondientes a diciembre de 2007, tenemos las siguientes cantidades en miles de pesos: D_t = 1,750,743,547.00, L_t = 1,806578570.00, CB_t = 509,412,994.00 y G_t = 453,577,971.00. Además, en esa fecha, el rendimiento correspondiente a los Certificados de la tesorería de la Federación (CETES) a un plazo de 28 días era de 7.44% y la tasa interbancaria de equilibrio (TIIE) a un plazo de 28 días era de 7.9%, estas tasas corresponden a las variables r_G y r_B de nuestro modelo. Se consideró oportuno suponer que no se obtienen rendimientos de las reservas bancarias, en consecuencia, se omite de cada ecuación el término rR_t/L_t. En el modelo se suponen los parámetros $\rho > 0$ y $0 < \alpha < 1$, para el ejercicio empírico se usó $\rho = 0.5$ y α =0.5. La información necesaria para calcular las tasas activa y pasiva se complementa con los datos del cuadro 2.[9]

Gráfica 1

Simulación Monte Carlo de las variaciones de los créditos bancarios



Fuente: Elaboración propia

Si se sustituye la ecuación (28) en (25) y se resuelve para r_L, utilizando los valores correspondientes a cada variable se obtiene una

[9] Es importante señalar que, en las series estadísticas del balance general del sistema bancario que publica el Banco de México, sólo se incluyen los principales pasivos y activos, el dato correspondiente a la tenencia de valores gubernamentales G_t, no se publica como tal, sin embargo, se dedujo de la diferencia entre los activos totales y el crédito otorgado.

tasa activa de 31.9210157%; si este resultado se sustituye en (28) se obtiene la tasa pasiva de 26.8483594%. En el caso donde se incluye la presencia de riesgo de incumplimiento se repite el procedimiento, pero ahora utilizando las ecuaciones (26) y (28). Por construcción del modelo, para determinar la probabilidad instantánea de incumplimiento se requiere conocer de tres probabilidades acumuladas de incumplimiento (las existentes en los periodos $T - t$, $\tau_1 - t$ y $T - \tau_2$), según la ecuación (5); por simplicidad, suponemos que la probabilidad acumulada de incumplimiento es de 0.5. En este escenario, como se esperaba, las tasas activa y pasiva son mayores que en el caso donde no existe riesgo, se encontró que $r_L = 59.0542059\%$ y $r_D = 38.1425231\%$.

Como se observa, el modelo permite estimar las tasas pasiva y activa óptimas de forma coherente, aunque no se dispone de series estadísticas para las tasas que efectivamente se han observado en la actividad de la banca comercial, con las cuales comparar los resultados obtenidos. Si acaso, las únicas posibilidades de comparación son las tasas de referencia de CETES y TIIE, pero entre éstas y las tasas activa y pasiva existe considerable disparidad tanto en las observaciones registradas como en los resultados generados con el modelo.

Finalmente, puede extenderse la aplicación empírica del modelo calculando, a partir de los resultados anteriores, el margen financiero y el margen por riesgo definidos en la sección seis. Los resultados de este ejercicio son los siguientes: *1*) Margen financiero en ausencia de riesgo de incumplimiento, según la ecuación (30) M_a = \$100,134,884.00, *2*) Margen financiero en presencia de riesgo de incumplimiento, según la ecuación (31) M_b = \$590,317,284.00, *3*) Margen financiero ajustado por riesgo crediticio, según la ecuación (32) M_c = \$1,003,424,169.00 y *4*) Margen por riesgo, de acuerdo con la ecuación (33) $M_d = 27.13319\%$.

8. Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un modelo de optimización de ganancias para un banco comercial representativo. En la mayor parte de las propuestas al respecto, la elección de este agente se concentra en las cantidades óptimas de activos y pasivos tomando los precios como dados. En cambio, en nuestra propuesta, se determinan las tasas óptimas de depósitos y préstamos (tasas pasivas y activas) en donde la incertidumbre está presente tanto en depósitos como en préstamos. Además, se incluye en el análisis la probabilidad de que los prestatarios (clientes del banco) incumplan con sus compromisos de pago.

Entre los resultados principales de esta investigación se encuentra que, la tasa de crédito depende negativamente de las magnitudes que constituyen los activos del banco, así como de la volatilidad de los créditos, pero esta tasa se incrementa con la probabilidad de incumplimiento instantánea asociada al préstamo. Por otro lado, el rendimiento que el banco ofrece a los depósitos es una función decreciente de los depósitos bancarios, y creciente del capital bancario y de la volatilidad de los depósitos. Los resultados son importantes porque se obtienen como soluciones analíticas cerradas, no como soluciones numéricas particulares. Además, a partir de los resultados analíticos se obtiene el margen financiero, el margen por riesgo y se extiende el supuesto de que la probabilidad de incumplimiento sigue un proceso Poisson.

Por último, como un ejercicio de aplicación del modelo propuesto, se estimaron las variaciones posibles de los créditos y depósitos bancarios mediante simulación Monte Carlo para el caso mexicano. En este ejercicio se mostró cierta consistencia entre los datos simulados y los observados; no obstante, en la práctica los resultados de la simulación podrían mejorarse si se dispusiera de series diarias de los componentes del balance bancario. Asimismo, es importante destacar que en la aplicación numérica del modelo se hizo evidente la posibilidad de determinar las tasas activa y pasiva óptimas.

Por supuesto, resta como extensión de la investigación, profundizar en las aplicaciones empíricas del modelo desarrollado, especialmente sería útil considerar rasgos específicos de la actividad bancaria en México.

Bibliografía

Allen, F. y A. Santomero (1997). The Theory of Financial Intermediation, *Journal of Banking and Finance*, 21(11-12), 1461-1485.

Bhattacharya, S. y A. Thakor (1993). Contemporary Banking Theory, *Journal of Financial Intermediation*, 3(1), 2-50.

Bierman, H. y J. Hass (1975). An Analytic Model of Bond Risk Differentials, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 10(5), 757-773.

Bougheas, S. y A. Ruiz (2008). Administración de los problemas financieros en los bancos: dilema entre los riesgos de liquidez y solvencia, *El Trimestre Económico*, número especial, vol. LXXV, 215-233.

Boyd, J. H. y G. de Nicoló (2003). *Bank Risk Taking and Competition Revisited*, IMF Working Paper Series, WP/03/114.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, *Econometrica*, 53(2), 385-408.

Dermine, J. (1986). Deposit Rates, Credit Rates and Bank Capital. The Klein-Monti Model Revisited, *Journal of Banking and Finance*, 10(1), 99-114.

Diamond, D. W. y P. H. Dybvig (1986). Banking Theory, Deposit Insurance, and Bank Regulation, *The Journal of Business*, 59(1), 55-68.

Freixas, X. y J. C. Rochet (1997). *Microeconomics of Banking*, MIT, Cambridge.

Ho, T. y S. Lee (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Finance*, 41(5), 1129-1142.

Hull, J. (2003). *Options, Futures and other Derivatives*, 5a. ed., Prentice Hall.

—— (1989). Assessing Credit Risk in a Financial Institution's Off-Balance Sheet Commitments, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(4), 489-501.

—— y A. White (1990). Pricing Interest-Rate-Derivative Securities, *The Review of Financial Studies*, 3(4), 573-592.

Klein, M. (1971). A Theory of the Banking Firm, *Journal of Money, Credit and Banking*, 3(2), 205-218.

Longstaff, F. A. (1989). A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial Economics*, 23(2), 195-224.

Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.

Mishkin, F. (2000). *The Economics of Money, Banking and Financial Markets*, 6a. ed., Addison Wesley, Boston.

O'Hara, M. (1983). A Dynamic Theory of the Banking Firm, *The Journal of Finance*, 38(1), 127-140.

Rajan, R. G. (1994). Why Bank Credit Policies Fluctuate: A Theory and Some Evidence, *The Quarterly Journal of Economics*, 109(2), 399-441.

Ratti, R. (1980). Bank Attitude Toward Risk, Implicit Rates of Interest, and the Behavior of an Index of Risk Aversion for Commercial Banks, *The Quarterly Journal of Economics*, 95(2), 309-331.

Scholtens, B. y D. van Wensveen (2000). A Critique on The Theory of Financial Intermediation, *Journal of Banking and Finance*, 24(8), 1243-1251.

Tobin, J. (1982). The Commercial Banking Firm: A Simple Model, *The Scandinavian Journal of Economics*, 84(4), 495-530.

Towey, R. (1974). Money Creation and the Theory of the Banking Firm, *The Journal of Finance*, 29(1), 57-72.

Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188.

Venegas Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Cengage Learning, 2a. ed., México.

Yawitz, J. B. (1977). An Analytical Model of Interest Rate Differentials and Different Default Recoveries, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12(3), 481-490.

Anexo A

En este anexo establecemos el lema de Itô para dos variables conducidas por ecuaciones diferenciales estocásticas. Dadas las ecuaciones diferenciales estocásticas con los factores de riesgo, $\mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{d}Z_t$:

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1(S_{1t}, t)\,\mathrm{d}t + \sigma_1(S_{1t}, t)\,\mathrm{d}W_t,$$

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2(S_{2t}, t)\mathrm{d}t + \sigma_2(S_{2t}, t)\,\mathrm{d}Z_t,$$

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}Z_t) = \rho \mathrm{d}t$$

y dada la función $y = f(t, S_{1t}, S_{2t}$, su expansión en serie de Taylor hasta los términos de segundo orden está dada por:

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial S_{1t}}\mathrm{d}S_{1t}+\frac{\partial f}{\partial S_{2t}}\mathrm{d}S_{2t}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}^2}(\mathrm{d}S_{1t})^2+\frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}^2}(\mathrm{d}S_{2t})^2\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}\partial t}(\mathrm{d}S_{1t})(\mathrm{d}t)+\frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}\partial t}(\mathrm{d}S_{2t})(\mathrm{d}t)+\frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}\partial S_{2t}}(\mathrm{d}S_{1t})(\mathrm{d}S_{2t})\right)\right]$$

Si se sustituyen en la expresión anterior las ecuaciones diferenciales $\mathrm{d}S_1t$ y $\mathrm{d}S_2t$, y se usan las reglas $(\mathrm{d}t)^2 = 0$, $(\mathrm{d}W_t)(\mathrm{d}t) = 0$, $(\mathrm{d}Z_t)(\mathrm{d}t) = 0$ y $(\mathrm{d}W_t)(\mathrm{d}Z_t)= \mathrm{d}t$, se tiene que:

$$\mathrm{d}y=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S_{1t}}\mu_1(S_{1t},t)+\frac{\partial f}{\partial S_{2t}}(\mu_2,S_{2t})+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}^2}\sigma_1^2(S_{1t},t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}^2}\sigma_2^2(S_{2t},t)\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}\partial S_{2t}}\rho\sigma_1(S_{1t},t)\sigma_2(S_{2t},t)\right]\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial S_{1t}}\sigma_1(S_{1t},t)\,\mathrm{d}W_t+\frac{\partial f}{\partial S_{2t}}\sigma_2(S_{2t},t)\,\mathrm{d}Z_t$$

Anexo B

A partir de la ecuación:

$$r_L=\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D+\mu_L+\frac{rR_t}{L_t}+\frac{G_t\ln(Q(\tau)-\nu(t,\tau_1)-v(\tau_2,T))}{L_t}}{(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

Si $L/(L-G(1-\alpha)\sigma_L^2)<0$, entonces, se obtiene:

$$\frac{\partial r_L}{\partial R_t}<0\frac{\partial r_L}{\partial \sigma_t}<0\frac{\partial r_L}{\partial Q(t)}<0\frac{\partial r_L}{\partial P(t)}>0$$

Ahora, suponiendo $x=Q(\tau)-v(t,\tau_1)-v(\tau_2,T)$, resolvemos:

$$\frac{\partial r_L}{\partial L_t}=\frac{\partial}{\partial L_t}\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

$$+\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\frac{\partial}{\partial L_t}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial r_L}{\partial L_t}=\left\{-\frac{rR_t}{L_t^2(1-\alpha)\sigma_L^2}-\frac{G\ln(x)}{L_t^2(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L}{L-G(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

$$+\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}{(L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)^2}\right]$$

Si como antes, $L_t/(L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)<0$, el signo del primer miembro de la ecuación anterior es positivo y el signo del segundo término es negativo, entonces $\partial r_L/\partial L_t<0$ si:

$$\left\{-\frac{rR_t}{L_t^2(1-\alpha)\sigma_L^2}-\frac{G_t\ln(x)}{L_t^2(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]<$$

$$\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}{(L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)^2}\right]$$

Por último, resolvemos:

$$\frac{\partial r_L}{\partial G_t}=\frac{\partial}{\partial G_t}\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

$$+\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}+\frac{G_t\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\frac{\partial}{\partial G_t}\left[\frac{L_t}{L_t-G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial r_L}{\partial G_t} = \frac{\partial}{\partial G_t}\left\{\frac{\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right]$$

$$+\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{G_t\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}{(L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)^2}\right]$$

El primer término es negativo y el segundo positivo, por tanto, $\partial r_L/\partial G_t < 0$, siempre y cuando se cumpla que:

$$\frac{\partial}{\partial G_t}\left\{\frac{\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t}{L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right] >$$

$$\left\{\frac{(1-\alpha)\sigma_L\rho\sigma_D r_D}{(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{\mu_L}{(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{rR_t}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2} + \frac{G_t\ln(x)}{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}\right\}\left[\frac{L_t(1-\alpha)\sigma_L^2}{(L_t - G_t(1-\alpha)\sigma_L^2)^2}\right].$$