

PRUEBAS DE NO LINEALIDAD DE LOS RENDIMIENTOS DEL MERCADO MEXICANO ACCIONARIO: COEFICIENTES DE LYAPUNOV

Arturo Lorenzo Valdés*

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Resumen: Se investiga sobre la no linealidad de los rendimientos diarios del mercado accionario mexicano. Se encuentra evidencia empírica sobre el rechazo de especificaciones lineales para describir el comportamiento de los rendimientos, lo cual pone en duda la mayoría de los resultados que se han generado en la literatura con modelos lineales sobre el comportamiento del mercado de capitales en México. Posteriormente se prueba la presencia de caminata aleatoria en el Índice de Precios y Cotizaciones de México contra la hipótesis alternativa de caos. Para ello se diseña un estadístico basado en la estimación del exponente dominante de Lyapunov empleando métodos de regresión polinomial local. Por último, se encuentra la distribución empírica del estadístico utilizando el método de datos sustitutos. Los resultados de la prueba muestran que no se rechaza la hipótesis de caminata aleatoria.

Abstract: We examine the non-linearity of the Mexican Stock Market daily returns. We find empirical evidence to reject lineal specifications in the behavior of the stock returns. As a consequence, most of the findings based on lineal methods regarding the stock market in Mexico may be questioned. We also test a random walk specification versus an alternative hypothesis of chaos in the Mexican stock market index, IPC. To achieve this, we design a statistic based on Lyapunov dominant exponent by using local polynomial regression methods. The empirical distribution of the statistic is obtained through the surrogate data method. Finally, the test concludes that the hypothesis of random walk cannot be rejected.

Clasificación JEL: C51, C52

Fecha de recepción: 25 VI 2001

Fecha de aceptación: 02 IV 2002

* arvaldes@campus.ccm.itesm.mx

1. Introducción

En los últimos años, el comportamiento temporal de los mercados de capitales en América Latina ha cobrado particular interés. Los mercados emergentes de esta región del mundo se han caracterizado por sus singulares marcos institucionales y regulatorios, así como por su volatilidad y altos rendimientos. La mayor parte de estudios empíricos enfocados en el tema se basan en modelos econométricos lineales en los parámetros, con implicaciones importantes en la estimación de precios de activos y sus productos derivados. Por ejemplo, los modelos tradicionales de valuación de activos de capital, CAPM, o bien de la teoría de precios de arbitraje, APT, son esencialmente lineales.

Existe un número importante de estudios empíricos sobre la hipótesis de eficiencia de estos mercados, *i.e.*, que los precios de los activos se comportan de acuerdo con una caminata aleatoria. Lo anterior significa que, los agentes no pueden diseñar una estrategia de inversión que genere beneficios extraordinarios considerando sólo el comportamiento histórico de los precios de los activos. En este caso, la mejor predicción que puede hacerse sobre el precio de un activo es el precio actual.

Se dice que un mercado es eficiente con respecto a un conjunto de información, si los precios reflejan toda la información disponible. Ello implica que no existen oportunidades (de arbitraje) para obtener beneficios extraordinarios. Con mayor precisión, la eficiencia puede ser definida dependiendo del grado de información disponible: se dice que existe eficiencia débil si el conjunto de información sólo incluye la historia de precios, eficiencia semi-fuerte si se considera la información conocida por los participantes del mercado, y eficiencia fuerte si incluye la información conocida por cualquier participante del mercado.

El problema de predecir precios futuros está muy relacionado con la eficiencia del mercado. Es claro que, si se pudieran predecir los precios futuros de tal manera que se produzcan ganancias a causa de ello, el mercado sería ineficiente. Los modelos de precios de activos por lo general implican un modelo martingala. Se dice que un proceso estocástico x_t es martingala si $E(x_{t+1} | \Omega_t) = x_t$ donde Ω_t representa el conjunto de información al tiempo t . Si x_t representa el precio de algún activo, el conjunto de información refleja completamente dicho precio, por lo que sería un mercado eficiente. Este modelo puede escribirse como $x_{t+1} = x_t + \varepsilon_t$ con ε_t una diferencia martingala. Escrito de tal manera, el modelo parece una caminata aleatoria, sin embargo, esta última presenta mayores restricciones, ya que una diferencia martingala requiere sólo de independencia en

la esperanza condicional, mientras que la caminata aleatoria necesita ruido blanco. El supuesto entonces es que, si la serie del IPC sigue una caminata aleatoria, el precio refleja toda la información del mercado, y por lo tanto es eficiente.

En la literatura empírica existen varios estudios para América Latina sobre la eficiencia de los mercados financieros. Por ejemplo, Mejía, Grados y Meunier (1991) aplican varias pruebas estadísticas sobre eficiencia en su forma débil en el mercado mexicano. Basados en una prueba de corridas, los autores llegan a la conclusión de que el mercado es parcialmente ineficiente en su forma débil, y obtienen el mismo resultado con una prueba de correlación serial. Realizan una tercera prueba generada a partir del modelo de activos de capital, en el que estiman las ganancias extraordinarias, y concluyen que el mercado no es eficiente en su forma débil. Asimismo, Urrutia (1995) examina los rendimientos mensuales de los índices bursátiles de Argentina, Brasil, Chile y México utilizando una prueba de razón de varianza, y encuentra evidencia para rechazar la hipótesis de caminata aleatoria en favor de aversión a la media en los cuatro países. Por otro lado, Grieb y Reyes (1999) realizan una prueba de caminata aleatoria en precios de activos para Brasil y México, con base en una prueba de razón de varianza sobre rendimientos semanales de los principales índices accionarios de cada país. Concluyen que para México se rechaza la hipótesis de caminata aleatoria en favor de aversión a la media, pero en Brasil hay una tendencia a caminata aleatoria. Finalmente, Ojah y Karemera (1999) desarrollan pruebas de razón de varianza múltiple y de modelos integrados fraccionales sobre rendimientos de los índices en dólares de Argentina, Brasil, Chile y México. En este estudio no se rechaza la hipótesis de caminata aleatoria, por lo que se acepta la eficiencia débil.

Los estudios anteriores se basan en modelos lineales de series de tiempo. Como se puede observar a partir de ellos, permanece la necesidad de desarrollar métodos alternativos que generen una descripción más cercana a la realidad de lo que sucede en los mercados financieros. Una alternativa son los modelos no lineales. Desde la perspectiva de la no linealidad, el comportamiento se visualiza a partir de sistemas dinámicos, en donde el estado futuro es sensible a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales que los generan. A este tipo de modelos también se les denomina caóticos.

Aquí presentamos una metodología para el análisis empírico de series de tiempo financieras, aplicado al mercado accionario mexicano. En primer lugar, se probará que la dinámica del comportamiento del índice de precios y cotizaciones, *IPC*, de la Bolsa Mexicana de

Valores, BMV, es no lineal. Las pruebas que se utilizan son: la de tercer momento de Hsieh (1989) y la de Brock *et al.* (1996), *BDS*. Más adelante, se diseña un estadístico basado en una estimación del exponente de Lyapunov dominante empleando métodos de regresión local lineal, para probar la hipótesis nula de caminata aleatoria contra la alternativa de caos. La hipótesis de caos permite la predicción en el corto plazo. Dicha prueba se puede emplear para cualquier serie de tiempo univariada, en este trabajo, se aplica en el *IPC*.

2. Pruebas de no linealidad

Para probar la no linealidad en los rendimientos del mercado accionario mexicano se recurre al análisis no lineal de series de tiempo el cual supone que, como en el caso lineal, los errores ε_t son independientes e idénticamente distribuidos, *i.i.d.*, con media cero y varianza 1, *i.e.*, que ε_t es ruido blanco, y se busca una posible relación no lineal en dichos errores. En este caso, la relación puede representarse como $x_t = f(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-k}) + \varepsilon_t g(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-k})$, donde $f(\cdot)$ es la media de x_t y $g(\cdot)$ es la varianza de x_t . Los modelos que son no lineales en la media permiten que momentos de grado mayor que dos sean distintos de cero. Hsieh (1989) construye un estadístico basado en el tercer momento dado por:

$$\varphi(i, j) \equiv \frac{E[x_t x_{t-i} x_{t-j}]}{E[x_t^3]^{3/2}}$$

y observa que $\varphi(i, j) = 0 \forall i, j > 0$ para datos *i.i.d.* o datos generados por un modelo martingala que es no lineal sólo en varianza y sugiere estimarlo por:

$$\hat{k}(i, j) \equiv \frac{(1/T) \sum_t x_t x_{t-i} x_{t-j}}{\left[(1/T) \sum_t x_t^2 \right]^{1/2}}$$

Bajo la hipótesis nula de $\varphi(i, j) = 0$, $\sqrt{T} \hat{\varphi}(i, j)$, se distribuye asintóticamente como una normal con media cero y con una varianza que se puede estimar de manera consistente como:

$$\hat{V} \equiv \frac{(1/T) \sum_t x_t^2 x_{t-i}^2 x_{t-j}^2}{\left[(1/T) \sum_t x_t^2 \right]^3}$$

La prueba está diseñada para rechazar solamente la presencia de no linealidad aditiva (no linealidad en la media), es decir, $x_t = \varepsilon_t + f(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-k})$, y se puede combinar con el estadístico *BDS* desarrollado por Brock *et al.* (1996), para probar independencia en los datos. Este estadístico para probar no linealidad utiliza el concepto de dimensión de correlación. La idea es centrar una esfera en un punto del espacio fase y hacer crecer el radio k de la esfera hasta que todos los puntos queden dentro de ella. Se define la función de correlación entre dos puntos como:

$$C_n(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \sum_{i < j} \theta(k - \|x_i - x_j\|)$$

donde θ es la función de Heavyside (indicadora) y $\|\cdot\|$ la norma suprema.

Grassberger y Procaccia (1983) consideran que para un valor de k pequeño, la dimensión de correlación es $v_n = \ln C_n(k) / \ln k$. Si la misma crece con n , el proceso será estocástico, si es independiente de ella, será determinístico. Los autores muestran que aun cuando k es finito, si los datos son *i.i.d.*, entonces para cualquier n , $C_n(k) = C_1(k)^n$. Asimismo, desarrollan un estadístico que se distribuye asintóticamente normal estándar:

$$J_{n,T}(k) = \sqrt{T} \frac{C_{n,T}(k) - C_{1,T}(k)^n}{\hat{\sigma}_{n,T}(k)}$$

Bajo la hipótesis nula $C_n(k) \rightarrow \prod_{i=0}^{n-1} \text{Prob}\{\|x_{t+i} - x_{s+i}\| < k\}$, cuando $T \rightarrow \infty$. El estadístico *BDS* prueba la hipótesis nula de independencia aleatoria y sistemas idénticamente distribuidos. Rechazar la hipótesis nula sería consistente con algún tipo de dependencia en los datos que podría resultar de un sistema lineal estocástico o de un sistema no lineal determinístico. No se prueba directamente la no linealidad, pero se puede utilizar de forma indirecta. Por ejemplo, si todas las posibilidades lineales han sido removidas al utilizar un modelo *ARIMA*, el estadístico *BDS* puede ser utilizado para probar dependencia no lineal en los residuos.

3. Estimación de los exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov miden la sensibilidad a condiciones iniciales, es decir, la tasa a la que trayectorias cercanas convergen o

divergen y dan información sobre las propiedades de estabilidad de un sistema dinámico. Lo anterior implica que una pequeña perturbación introducida al sistema en cualquier periodo, hace que el comportamiento de éste se vuelva impredecible. Existen tantos exponentes de Lyapunov como la dimensión en el espacio estado del sistema. La dimensión a su vez se representa por el conjunto de los estados posibles del sistema, con lo anterior se genera una serie conocida como espectro de exponentes de Lyapunov que caracterizan la deformación de dicho espacio multidimensional. El exponente de Lyapunov que interesa para el propósito de este estudio es el más grande, el cual mide la tasa de producción de información, o mejor dicho, la mayor tasa de crecimiento a la que se expande el espacio fase y con la que se separan las trayectorias. A dicho exponente lo denotaremos por λ . Si $\lambda < 0$, las trayectorias convergen en tiempo y el sistema dinámico no es sensible a las condiciones iniciales. Si λ es positivo, las distancias entre trayectorias cercanas crecerán exponencialmente en el tiempo y el sistema exhibirá dependencia sensible a condiciones iniciales.

Supongamos el siguiente modelo:

$$y_t = m(x_t) + \varepsilon_t$$

con $m(x)$ una función diferenciable desconocida y ε_t una serie de variables aleatorias *i.i.d.*, con media cero y varianza σ^2 . Para estimar los exponentes de Lyapunov (Whang y Linton, 1999 y McCaffrey *et al.*, 1992) se utiliza:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{T} \ln \left\| \prod_{t=1}^T \hat{J}_{T-t} \right\|$$

donde

$$\hat{J}_t = \begin{bmatrix} \hat{m}_{1t} & \hat{m}_{2t} & \dots & \hat{m}_{(v-1)t} & \hat{m}_{vt} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

en la que

$$\hat{m}_{jt} = \frac{\partial \hat{m}(x_t)}{\partial x_{jt}}$$

son estimaciones de las derivadas parciales. Al estimar el exponente de Lyapunov dominante es necesario contar con buenos estimadores de las derivadas parciales de $m(x)$. Park y Whang (1999) obtienen buenas aproximaciones de $m(x)$ por el estimador de Nadaraya Watson calculando la derivada en cada punto. Cabe mencionar que dicho estimador es un caso particular de regresión polinomial local en el que la función $m(x)$ se aproxima por una constante, sin embargo, en este trabajo se obtienen estimaciones directamente por regresión local lineal, en donde la función $m(x)$ se aproxima por funciones lineales.

4. Prueba de caminata aleatoria contra caos determinista

En esta sección se estima el exponente de Lyapunov dominante bajo la hipótesis nula de caminata aleatoria, es decir, $x_{t+1} = x_t + \varepsilon_t$. La estimación se hace utilizando métodos de regresión polinomial local que es un método no paramétrico. Estos métodos se basan en la creencia de que los modelos de regresión paramétrica dan como resultado especificaciones e inferencias incorrectas cuando no se conoce la forma funcional. El enfoque no paramétrico resulta entonces útil y efectivo para detectar no linealidad y para explorar las relaciones funcionales. Consideremos el siguiente modelo:

$$y_t = m(x_t) + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

con $m(x)$ una función diferenciable desconocida y ε_t una serie de variables aleatorias *i.i.d.*, con media cero y varianza σ^2 . En una vecindad del punto x tenemos, por series de Taylor, que la mejor aproximación lineal de la función en el punto y que pertenece a la vecindad de x es $m(y) \approx m(x) + m'(x)(y-x) \equiv a + b(y-x)$. Por lo que, el problema de estimar $m(x)$ y $m'(x)$ es equivalente al problema de regresión local lineal (4.2) para cada x , de encontrar los estimadores para a y b

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \arg \min_{(a,b)} \left\{ \sum_{t=1}^T (y_t - a - b(x_t - x))^2 K \left(\frac{x - x_t}{h_T} \right) \right\} \quad (4.2)$$

La función $K \left(\frac{x - x_t}{h_T} \right)$ en (4.2) es el kernel que debe ser positivo en su dominio y h_T el ancho de banda o parámetro de suavizamiento. Las funciones utilizadas como kernel, deben cumplir que

$$\int K(u)du = 1.$$

Con frecuencia se utiliza como kernel una función de densidad de probabilidad simétrica alrededor del cero, aunque su utilidad es como ponderador no como densidad de probabilidad. Uno muy utilizado es el kernel Gaussiano

$$K(t) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-t^2/2).$$

El parámetro h_T es un parámetro de suavizamiento y se conoce como ancho de banda. Si es muy pequeño, la ponderación se hará con respecto a vecindades igual de pequeñas alrededor del punto x estudiado. Si es muy grande, la ponderación será sobre vecindades grandes de x , de ahí la importancia de elegir un ancho de banda adecuado. Si expresamos (4.2) en forma matricial, definimos

$$X = \begin{pmatrix} 1 & (x - x_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (x_T - x) \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} K\left(\frac{x-x_1}{h}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K\left(\frac{x-x_2}{h}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K\left(\frac{x-x_T}{h}\right) \end{pmatrix}$$

Por lo que el problema (4.2) se reduce a:

$$\min_{\beta} (Y - X\beta)'W(Y - X\beta). \quad (4.3)$$

Una ventaja de expresar el problema en forma matricial es que se puede extender al caso multidimensional, en el que la mejor aproximación lineal se puede obtener a partir de series de Taylor, pero tomando, en este caso, las derivadas parciales. Si consideramos la función $m(x)$ con $x = (x_1, x_2, \dots, x_v)$, la aproximación lineal sería

$$m(y) \approx m(x) + \frac{\partial m(x)}{\partial y_1}(y_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial m(x)}{\partial y_v}(y_v - x_v).$$

El kernel a utilizarse sería multidimensional. La solución de (4.3) es el vector de estimadores:

$$\hat{\beta} = (X'WX)^{-1}X'WY.$$

Al sustituir el valor de $Y = m(X) + \varepsilon$ con $m(X) = (m(x_1), m(x_2), \dots, m(x_T))'$ tenemos

$$\hat{\beta} = (X'WX)^{-1}X'W(m(X) + \varepsilon)$$

pero podemos escribir $m(X) = X\beta + (m(X) - X\beta)$ por lo que

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'WX)^{-1}X'W(X\beta + (m(X) - X\beta) + \varepsilon) \\ &= (X'WX)^{-1}(X'WX)\beta + (X'WX)^{-1}X'W(m(X) - X\beta + \varepsilon) \\ &= \beta + (X'WX)^{-1}X'W(m(X) - X\beta) + (X'WX)^{-1}X'W\varepsilon,\end{aligned}$$

y la esperanza condicional

$$E(\hat{\beta} | X) = \beta + (X'WX)^{-1}X'W(m(X) - X\beta).$$

De la misma forma se obtiene la varianza condicional

$$\text{Var}(\hat{\beta} | X) = \sigma^2(X'WX)^{-1}(X'WWWX)(X'WX)^{-1}$$

Se debe notar que si la función $m(x)$ en (4.1) es lineal, entonces los estimadores serían insesgados (ya que en ese caso $m(X) = X\beta$). Más aún, de la teoría de los estimadores por mínimos cuadrados, se tiene que $\hat{\beta}$ es un estimador consistente de β , y al ser $m(X) = X\beta$, es un estimador consistente de $m(x)$ y de sus derivadas parciales, respectivamente. Lo anterior es importante porque justifica aspectos técnicos de la prueba central de este trabajo.

Para cada observación x_t de la serie de tiempo con $t = 1, \dots, T$, se debe resolver el problema de mínimos cuadrados definido en (4.2), obteniendo como resultado valores \hat{a}_t y \hat{b}_t . Para los fines de nuestra investigación, sólo se requieren los estimadores de b_t para $t = 1, \dots, T$. Se puede entonces estimar el exponente de Lyapunov para una función univariada como

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(|\hat{b}_t|). \quad (4.4)$$

Bajo el supuesto de linealidad para una serie de tiempo univariada, el estimador del exponente de Lyapunov es consistente. La afirmación se debe a que \hat{a}_t y \hat{b}_t en (4.2) son estimadores consistentes de $m(x_t)$ y $m'(x_t)$. Para este caso se toma el siguiente teorema cuya demostración se encuentra en el apéndice.

TEOREMA. Sean \hat{b}_t los estimadores por regresión local lineal de $m'(x_t)$ para $t = 1, \dots, T$. Por su parte $\hat{\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(|\hat{b}_t|)$, es un estimador consistente de λ .

5. Datos y análisis empírico

El conjunto de datos iniciales consiste en 3 824 valores de cierre diarios del IPC, correspondientes al periodo del 12 de junio de 1985 al 6 de octubre del 2000. A partir de los datos iniciales se construye una serie de rendimientos diarios y se propone el mejor ajuste lineal, con lo que se obtienen series de residuos.

El cuadro 1 muestra los estadísticos de Hsieh para distintos rezagos. Se observa que no se rechaza la hipótesis nula de $\hat{\varphi}(i, j) = 0$, por lo que podemos rechazar la presencia de no linealidad positiva.

Cuadro 1
Estadístico de Hsieh de los residuales del ajuste lineal de los rendimientos del IPC

<i>Retraso</i>					
<i>i</i>	<i>j</i>	$\hat{\varphi}(i, j)$	<i>V</i>	<i>Desv.std</i>	<i>Estadístico</i>
1	1	-0.3835	177.5533	13.3249	-1.7780
2	1	0.0404	70.8653	8.4182	0.2968
2	2	-0.4784	389.5054	19.7359	-1.4974
3	1	0.3455	114.6345	10.7067	1.9931
3	2	-0.0694	85.0964	9.2248	-0.4646
3	3	-0.2493	248.1861	15.7539	-0.9773
4	1	0.0180	70.4902	8.3958	0.1327
4	2	0.2999	94.2931	9.7105	1.9070
4	3	0.0019	74.4109	8.6262	0.0136
4	4	-0.1810	139.4207	11.8077	-0.9468
5	1	-0.0613	72.2488	8.4999	-0.4450
5	2	0.0192	72.2125	8.4978	0.1393
5	3	0.0005	44.1676	6.6459	0.0043
5	4	0.0186	37.7387	6.1432	0.1865
5	5	-0.2851	122.4486	11.0656	-1.5909

El cuadro 2 muestra el estadístico *BDS* para distintas dimensiones de inserción y distintos radios, que muestran ser demasiado grandes, y con ello se rechaza la hipótesis nula de independencia.

Los estadísticos de tercer momento prueban que no hay dependencia no lineal aditiva, de tal manera que si existe no linealidad tendría que ser por medio de la varianza más que por la media. El estadístico *BDS*, por otro lado, muestra que hay dependencia no lineal en los datos (ya que se eliminó la posibilidad de independencia lineal al filtrar dicho efecto por los modelos *ARIMA*). Esto significa que es consistente con la presencia de alguna forma funcional no lineal, permitiendo la utilización de los métodos no lineales presentados en este trabajo.

Cuadro 2

Estadístico BDS de los residuales del ajuste lineal de los rendimientos del IPC, con n la dimensión de inserción y k el radio

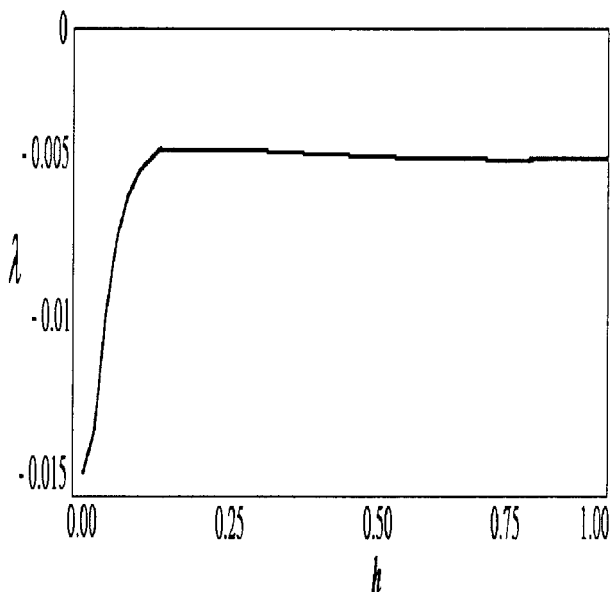
n	k					
	1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25
2	15.2579	15.2723	15.1839	14.6343	13.6889	12.5767
3	17.7821	18.0508	18.0891	17.5641	16.7612	15.3188
4	19.0333	19.5039	19.7375	19.4866	19.0147	17.8689
5	19.8974	20.6898	21.3621	21.6349	21.5481	20.1735
6	20.5977	21.8075	23.0502	24.0369	24.6559	22.9588
7	21.2048	22.8673	24.8080	26.7903	28.6055	26.2985
8	21.7228	23.8549	26.6166	29.7324	33.4197	37.5586
9	22.3338	25.0339	28.7629	33.4099	38.9901	43.2937
10	23.1069	26.5286	31.5369	38.3043	46.9633	8.7776

Así pues, se ha construido un estimador del exponente de Lyapunov dominante que bajo el supuesto de linealidad es consistente.

Del problema (4.2) se estima b , que bajo la hipótesis nula es uno. Hay que recordar que bajo el supuesto de linealidad las estimaciones de b por regresión local lineal son consistentes y, por lo tanto, la estimación del exponente de Lyapunov también es consistente. La estimación del estadístico se presenta en la gráfica 1.

Gráfica 1

Valores del estadístico del exponente de Lyapunov calculado para la serie del logaritmo del IPC

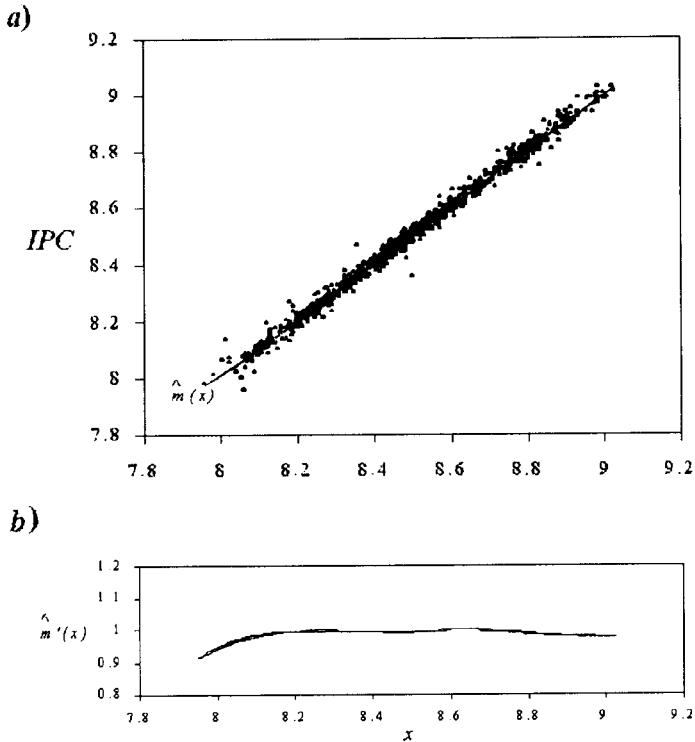


Se tomaron mil datos del logaritmo del índice y se calculó el exponente para distintos valores del ancho de banda. En todos los casos, el estadístico es muy cercano a cero, lo que parece indicar que efectivamente es una caminata aleatoria.

La gráfica 2 presenta la estimación de la función y su derivada para un ancho de banda de 0.5 veces la desviación estándar de la serie.

Gráfica 2

- a) Serie del logaritmo del IPC con respecto al día anterior (x) y estimación de la función por regresión local lineal con $h = 0.5 \text{ desv.std}$ (y)
- b) Estimación por regresión local lineal de la derivada de la función



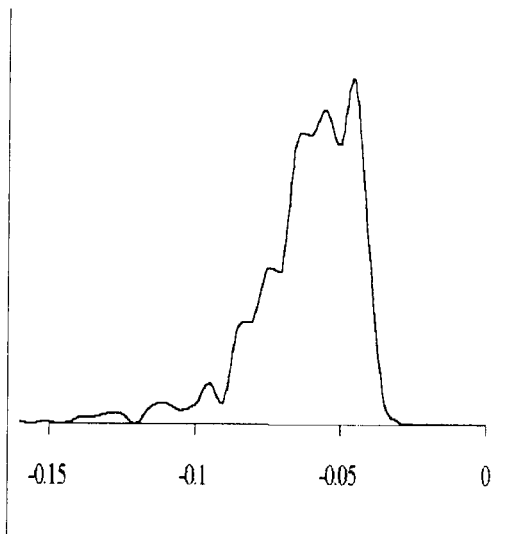
Finalmente, para poder realizar la prueba de caminata aleatoria contra caos, es necesario conocer la función de distribución del estadístico bajo la hipótesis nula. Al resultar esto muy complicado, se emplea la técnica de datos sustitutos (Schreiber y Schmitz, 2000) siguiendo el proceso que se menciona a continuación:

1. Se utiliza como ancho de banda $h=0.5 * \text{std}(\text{IPC})$ con $\text{std}(\text{IPC})$ la desviación estándar del logaritmo del IPC;

2. Se calcula el estimador del exponente de Lyapunov;
3. Se generaron mil series de datos sustitutos de doscientas observaciones cada uno a partir de los datos originales;
4. Se calcula el estadístico para los datos sustitutos así como su media y su varianza;
5. Se obtiene la distribución empírica (gráfica 3) y los cuantiles correspondientes.

Gráfica 3

Distribución empírica de los exponentes de Lyapunov generados con la técnica de datos sustitutos



Los resultados se presentan en el siguiente cuadro:

Cuadro 3

Cuantiles de la distribución empírica de los exponentes de Lyapunov

$1 - \alpha$	0.99	0.975	0.95	0.925	0.9
λ	-0.04	-0.04183	-0.0433	-0.04457	-0.04555

El estadístico de Lyapunov calculado con los datos originales, que en este caso es $\hat{\lambda} = -0.1034$, es muy pequeño en relación con los cuantiles calculados a partir de la distribución empírica. De acuerdo con lo anterior, la hipótesis nula de caminata aleatoria no se rechaza, es decir, el caos no resultó ser mejor alternativa que caminata aleatoria. El principal índice accionario mexicano no presenta indicios de caos, por lo que se puede seguir aceptando el supuesto de eficiencia en este mercado.

6. Conclusiones

Para poder tener ganancias extraordinarias, el precio de determinado activo se debe predecir, pero si es una caminata aleatoria, la mejor predicción es el precio actual. Cuando el sistema es caótico se pueden hacer predicciones solamente en el corto plazo, debido a las perturbaciones que se presentan en todo sistema estocástico, ya que al ser caótico es muy sensible a esas perturbaciones, por lo que una predicción en el largo plazo no es confiable, ni factible.

El estadístico desarrollado, basado en los exponentes de Lyapunov, resulta ser una herramienta adecuada para realizar la prueba de caminata aleatoria contra caos, y con ello probar la no linealidad de determinado sistema, ya que bajo la hipótesis nula de caminata aleatoria el estadístico es consistente. Los distintos métodos para estimar exponentes de Lyapunov a partir de datos observados se clasifican en dos grupos (McCaffrey, *et al.*, 1992). Los primeros son métodos directos basados en los supuestos de que la serie crecerá exponencialmente a una tasa λ . La tasa de crecimiento de la perturbación, se estima siguiendo la evolución de las diferencias entre puntos observados cercanos. Por otro lado, están los métodos jacobianos donde los datos se utilizan para estimar el jacobiano de la función y λ . El exponente de Lyapunov dominante se calcula a partir de la estimación de los jacobianos. En este trabajo, se diseñó un estadístico para probar la sensibilidad a las condiciones iniciales. La idea central es emplear regresión local lineal para estimar el exponente de Lyapunov dominante. Este método se genera a partir de la utilización de kernels que son ponderadores de suavizamiento, con los que se trata de eliminar el ruido en las series con perturbaciones, es decir, trata de encontrar la dinámica del sistema.

Al realizar la prueba sobre el índice accionario no se puede rechazar la hipótesis nula de caminata aleatoria. A diferencia de otros mercados más grandes, como el estadounidense, podemos decir que no

hay evidencia para rechazar la eficiencia del mercado mexicano. Para realizar la prueba estadística es necesario conocer la distribución del estadístico, lo cual representa un problema complejo que se resuelve, en este caso, al encontrar una distribución empírica. Queda como tema de futuras investigaciones, entonces, encontrar la distribución asintótica del estimador.

Con las pruebas propuestas y el análisis empírico realizado, se pone en evidencia el uso de alternativas lineales para la explicación de los fenómenos financieros. Después de una revisión cuidadosa de los estudios empíricos realizados para el caso de América Latina, resulta clara la necesidad de contar con otros enfoques que proporcionen más y mejores resultados. Así, queda abierto el camino para profundizar en el uso del análisis no lineal de series de tiempo financieras, lo cual, sin duda, es un campo fértil para la investigación. Se requiere de más atención en esta dirección, y hacia allá se dirige nuestra agenda de trabajo.

Bibliografía

- Brock, W., *et al.* (1996). "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", *Econometric Reviews*, 15, pp. 197-235.
- Grassberger, P. e I. Procaccia (1983). "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", *Physica D*, 9, pp. 189-208.
- Grieb, T. y M. Reyes (1999). "Random Walk Tests for Latin American Equity Indexes and Individual Firms", *Journal of Financial Research*, 22, pp. 371-383.
- Hsieh, D. (1989). "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates", *Journal of Business*, 62, pp. 339-368.
- McCaffrey, D. *et al.* (1992). "Estimating the Lyapunov Exponent of a Chaotic System with Nonparametric Regression", *Journal of the American Statistical Association*, 87, pp. 682-695.
- Mejía, J., M. Grados y N. Meunier (1991). *La eficiencia del mercado accionario en México*, Documento de trabajo, Universidad de las Américas, Puebla.
- Ojah, K. y D. Karemera (1999). "Random Walks and Market Efficiency Tests for Latin American Emerging Equity Markets: A Revisit", *The Financial Review*, 34, pp. 57-72.
- Park, J. Y. y Y. Whang (1999). "Random Walk or Chaos: A Formal Test on the Lyapunov Exponent", (mimeo).
- Sheinkman, J. y B. LeBaron (1989). "Nonlinear Dynamics and Stock Returns", *Journal of Business*, 62, pp. 311-338.
- Schreiber, T. y A. Schmitz (2000). "Surrogate Time Series", *Physica D*, 142, pp. 346-382.

- Urrutia, J. L. (1995). "Tests of Random Walk and Market Efficiency for Latin American Emerging Equity Markets", *Journal of Financial Research*, 18, pp. 299-309.
- Whang, Y. y O. Linton (1999). "The Asymptotic Distribution of Non-parametric Estimates of the Lyapunov Exponent for Stochastic Time Series", *Journal of Econometrics*, 91, pp. 1-42.

Apéndice

Se demuestra la consistencia del estimador presentado en este documento

LEMA. Sea X_T una serie de variables aleatorias con un número finito de elementos. Sea f una función real continua en un punto x . Entonces si $p\text{-lim } X_T = x \Rightarrow p\text{-lim } f(X_T) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Si f es continua en x , tenemos que para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $\|X_T - x\| < \delta \Rightarrow |f(X_T) - f(x)| < \varepsilon$, por lo que $P(\|X_T - x\| < \delta) \leq P(|f(X_T) - f(x)| < \varepsilon)$, pero $p\text{-lim } X_T = x$, que es lo mismo que $\lim_{T \rightarrow \infty} P(\|X_T - x\| < \delta) = 1$, que implica que $\lim_{T \rightarrow \infty} P(|f(X_T) - f(x)| < \varepsilon) = 1$, por lo tanto $p\text{-lim } f(X_T) = f(x)$. ■

El lema anterior nos lleva a realizar las siguientes proposiciones, suponiendo siempre la linealidad de la función $m(x)$, es decir, $m(x) = a + bx$:

PROPOSICIÓN 1. Sea \hat{b}_t el estimador por regresión local lineal de $m'(x_t)$, entonces $|\hat{b}_t|$ es un estimador consistente de $|m'(x_t)|$.

DEMOSTRACIÓN. Al ser \hat{b}_t el estimador por regresión local lineal, es un estimador consistente de $m'(x_t)$. Como $f(x) = |x|$ es una función continua en todo su dominio, al utilizar el lema anterior se obtiene el resultado. ■

PROPOSICIÓN 2. Sea \hat{b}_t el estimador por regresión local lineal de $m'(x_t)$, entonces si $\hat{b}_t \neq 0$, $\ln(|\hat{b}_t|)$ es un estimador consistente de $\ln(|m'(x_t)|)$.

DEMOSTRACIÓN. Al ser \hat{b}_t el estimador por regresión local lineal, es un estimador consistente de $m'(x_t)$. Por la proposición 1 $|\hat{b}_t|$ es un estimador consistente de $|m'(x_t)|$. Como $f(x) = \ln(x)$ es una función

continua para $x > 0$, aplicando el lema, $\ln(| \hat{b}_t |)$ es un estimador consistente de $\ln(| m'(x_t) |)$. ■

Con lo anterior se puede demostrar que el estimador propuesto del exponente de Lyapunov es un estimador consistente, además se empleará la siguiente propiedad de límites en probabilidad: Si X_T y Y_T son variables aleatorias con $p\text{-lim } X_T = x$ y $p\text{-lim } Y_T = y$, entonces $p\text{-lim } (X_T + Y_T) = x + y$.

TEOREMA. Sean \hat{b}_t los estimadores por regresión local lineal de $m'(x_t)$ para $t = 1, \dots, T$. El estimador

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(| \hat{b}_t |),$$

es un estimador consistente de λ .

DEMOSTRACIÓN. De las dos proposiciones anteriores, si \hat{b}_t es el estimador por regresión local lineal de $m'(x_t)$ para cada $t = 1, \dots, T$, entonces $\ln(| \hat{b}_t |)$ son estimadores consistentes de $\ln(| m'(x_t) |)$, es decir, $p\text{-lim } \ln(| \hat{b}_t |) = \ln(| m'(x_t) |)$ para $t = 1, \dots, T$. De lo anterior, al sumar sobre todas las T utilizando la propiedad enunciada antes, y al hacer tender a infinito tenemos:

$$p\text{-lim } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(| \hat{b}_t |) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(| m'(x_t) |),$$

por lo que $\hat{\lambda} = \lambda$. ■